Digitized by the Internet Archive
in 2015

https://archive.org/details/ueberdieanwendun00bren

Herrn Dr. W. Hartner
z. freundl. Erinnerung an gemeinsam
erfolgreiche Zusammenarbeit.
24.2.1932 M. Brendel

Ueber die Anwendung

der

Gyldén'schen absoluten Störungstheorie

auf die Breitenstörungen

einer gewissen Klasse kleiner Planeten,

nebst numerischem Beispiel für den Planeten (46) Hestia.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde von der philosophischen Facultät

der

Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin.

Genehmigt und nebst den Thesen öffentlich zu verteidigen

am 18 Juni 1890

von

Martin Brendel,
aus Berlin.

Opponenten:

Herr Dr. V. Wellmann, Astronom in Berlin.
Herr Dr. Sv. Arrhenius, Docent an der Universität Upsala.
Herr Dr. Th. Arendt, Assistent am Kgl. meteorologisch-magnetischen Observatorium zu Potsdam.

Göttingen,
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kästner).
1890.

In einer früheren Abhandlung*) habe ich die Grundzüge einer Methode zur Berechnung der absoluten Bewegungen einer gewissen Gruppe kleiner Planeten gegeben, indem ich mich auf die schönen von Herrn Gyldén durch seine Arbeiten auf dem Gebiete der Störungstheorie gewonnenen Resultate stützte. Die erwähnte Gruppe umfasst alle diejenigen Planeten, für welche Herr Gyldén die Bezeichnung „Planeten vom Hestiatypus“ eingeführt hat, d. h. deren mittlere Bewegung angenähert dreimal so gross ist, wie die mittlere Bewegung des Jupiter. Wenn man zu dieser Gruppe alle Planeten zählt, deren mittlere Bewegung zwischen 800″ und 1000″ liegt, so ist es nahezu die Hälfte der bis jetzt entdeckten Planeten, auf die sich die a. a. O. und hier entwickelten Formeln unmittelbar anwenden lassen. — Der Planet (46) Hestia scheint von allen zu dieser Gruppe gehörenden Planeten der strengen Commensurabilität in bezug auf die mittleren Bewegungen am nächsten zu kommen, und da auch seine Excentricität recht beträchtlich ist, so bietet er sicher einen der schwierigsten Fälle dar.

In der erwähnten Abhandlung, wo ich am Schlusse die Anwendung auf Hestia als numerisches Beispiel gegeben, habe ich mich darauf beschränkt, die Bewegung des Planeten in seiner momentanen Bahnebene zu untersuchen, und habe auch die Herleitung der Störungen nur bis zu den Gliedern zweiten Grades in Bezug auf die Excentricität inclusive ausgeführt. Die numerischen für Hestia geltenden Resultate mit Berücksichtigung der Glieder dritten Grades habe ich zwar dort auch am Schluss mitgeteilt, mir jedoch eine ausführlichere Darstellung für später vorbehalten; dieselbe hoffe ich bald in einer anderen Abhandlung geben zu können.

Hier will ich nun meine früheren Untersuchungen insofern vervollständigen, als ich die Störungen der Bahnebene innerhalb derselben Grenzen herleiten will, innerhalb welcher ich auch früher meine Entwicklungen gehalten habe, nämlich bis zu den Gliedern vom zweiten Grade inclusive. Hier modificirt sich der Begriff eines Gliedes vom n-ten Grade etwas, indem beispielsweise nicht nur

*) Om användningen af den absoluta störingsteorien etc. Astron. Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Utgifna af H. Gyldén. Band IV. Heft 3.

solche Glieder vom ersten Grade genannt werden, welche die erste Potenz der Functionen η oder η', sondern auch solche, welche die erste Potenz des Sinus der Neigung der Bahnebene enthalten, und ebenso Glieder zweiten Grades solche, welche entweder das Quadrat von η, η' oder den Sinussen der Neigungen, oder auch das Produkt zweier dieser Grössen enthalten u. s. w.

Auch hier will ich noch besonders hervorheben, dass wir keine Entwicklungen oder Annäherungen machen, welche allgemein nach den Potenzen der störenden Massen fortschreiten und deren Nachteile ich bereits früher erörtert habe.

Man wird im Stande sein, durch Anwendung der von mir in Abh. I. — wie ich die oben erwähnte Abhandlung hier kurz bezeichnen werde — und hier gegebenen Formeln auf einen Planeten vom Hestiatypus, die Störungen desselben mit einer gewissen Annäherung berechnen zu können, so dass man selbst in schwierigen Fällen denselben noch nach einem längeren Zeitraum (vielleicht einem Jahrhundert) mit Hülfe der Vorausberechnung leicht am Himmel wieder wird auffinden können.

Meine Bemühungen sind hauptsächlich darauf gerichtet gewesen, das Problem auf möglichst einfache und kurze Weise zu lösen und die Resultate für die praktische Anwendung nutzbar zu machen; man wird sehen, dass die auszuführenden Rechnungen von grosser Einfachheit sind. In einem Punkte muss ich dabei noch die Abh. I ergänzen: es werden nämlich einige der Glieder vom ersten Grade recht beträchtlich, ohne einer der kritischen in Abh. I. pag. 8 angeführten Formen anzugehören; über den numerischen Betrag derselben wird man durch Betrachtung der Ausdrücke 76) in Abh. I eine Uebersicht gewinnen. Weiter unten werde ich über die Berücksichtigung dieser Glieder einige Bemerkungen hinzufügen.

1.

Die Gleichungen, durch welche die Bewegung des gestörten Planeten um die Sonne bestimmt ist, sind bekanntlich

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_1 x}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m_1 y}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m_1 z}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z}$$

wo die Zeichen keiner Erklärung bedürfen.

Als feste Grundebene nehmen wir die feste Ekliptik von 1850 Jan. 1.0 mittlere Zeit Paris an, da dieselbe den Arbeiten Leverrier's zu Grunde liegt, und deshalb sich für uns als am bequemsten erweist, indem wir zum Teil auf

die Benutzung von Leverrier's Resultaten in bezug auf die grossen Planeten angewiesen sind. Ich habe zwar in Abh. I das Aequinoctium 1880.0 als Anfangsepoche genommen, doch ist die Transformation der dort gewonnenen Ausdrücke auf 1850 sehr leicht auszuführen.

Wir müssen die obigen Gleichungen so umformen, dass wir die Gleichungen für die Bewegung in der momentanen Bahnebene von der der Bahnebene selbst getrennt erhalten; diese Transformation brauche ich hier um so weniger durchzuführen, als sie zum Teil aus den Arbeiten Hansens bekannt ist, und sich übrigens in Herr Gyldéns „Undersökningar af teorien för himlakropparnas rörelser" III. pag. 21 ff. sowie in Herr Harzers „Untersuchungen über einen speciellen Fall des Problems der drei Körper" pag. 7 ff. findet.

Sind nämlich x_1, y_1 und z_1 die Coordinaten des gestörten Körpers in bezug auf die bewegliche Bahnebene, so haben wir $z_1 = 0$, und ausserdem gelten die beiden Gleichungen

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{m_1 x_1}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} \qquad \frac{d^2y_1}{dt^2} + \frac{m_1 y_1}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}.$$

Mit der Integration derselben haben wir uns in Abh. I beschäftigt. Die Bewegung der Bahnebene bestimmt sich aus der dritten der obigen Gleichungen

1) $$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m_1 z}{r^3} = m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Diese Gleichung wollen wir nun umformen, indem wir die Breite b des Planeten über der festen Grundebene einführen; wir haben nämlich

$$z = r \sin b$$

und wenn wir

2) $$\zeta = \sin b$$

setzen, so geht Gleichung 1) über in

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\zeta}{r}\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{2}{r}\frac{d\zeta}{dt}\frac{dr}{dt} + \frac{m_1\zeta}{r^3} = \frac{m_1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Setzen wir für $\frac{d^2r}{dt^2}$ den bekannten, auch in Abh. I. pag. 4 angegebenen Ausdruck

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - \frac{m_1}{r^2} + m_1 \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

ein, so wird

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \zeta\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{2}{r}\frac{d\zeta}{dt}\frac{dr}{dt} = \frac{m_1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial z} - \frac{m_1\zeta}{r}\frac{\partial \Omega}{dr}.$$

In dieser Gleichung ersetzen wir nun t als unabhängige Variable, wie früher, durch die Länge v in der Bahn mittels der in Abh. I. Gl. 2) gegebenen Relation

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{a m_1 (1-\eta^2)}}{1+S}.$$

Es folgt hieraus

$$3)\quad \frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} - \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + \frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv}\right\}\frac{d\mathfrak{z}}{dv} + \mathfrak{z} = \frac{r^3}{a(1-\eta^2)}(1+S)^2\left[\frac{\partial\Omega}{\partial z} - \mathfrak{z}\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right].$$

Für die Störungsfunktion gilt nun der Ausdruck

$$\Omega = \frac{m'}{m_1}\left[\frac{1}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} - \frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right]$$

wo die accentuirten Grössen sich auf Jupiter beziehen, eine Bezeichnungsweise, an der wir durchweg bei unseren Untersuchungen festhalten.

Durch Differentiation obigen Ausdrucks ergiebt sich, wenn ich mit Δ die Entfernung zwischen dem störenden und dem gestörten Körper bezeichne:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{m'}{m_1}\left[-\frac{z}{\Delta^3} + z'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\right].$$

Andrerseits können wir schreiben:

$$\Omega = \frac{m'}{m_1}\left[\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r'^2}\cos H\right]$$

wo H den Winkel zwischen den Radien vectores des störenden und des gestörten Planeten bedeutet, und erhalten hieraus

$$\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{m'}{m_1}\left[-\frac{r}{\Delta^3} + r'\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\cos H\right]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H} = \frac{m'}{m_1} r r_1 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right)$$

Es ist also

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z} = \frac{m'}{m_1}\left[-\frac{r\mathfrak{z}}{\Delta^3} + \frac{\mathfrak{z}'}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\right]$$

und

$$\mathfrak{z}\frac{\partial\Omega}{\partial r} = \frac{m'}{m_1}\left[-\frac{r\mathfrak{z}}{\Delta^3} + \frac{\mathfrak{z}\cos H}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\right].$$

Mithin geht Gleichung 3) in die folgende über

4) $$\frac{d^2\zeta}{dv^2} - \left\{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv} + \frac{1}{1+S}\right\}\frac{d\zeta}{dv} + \zeta = (1+S)^2 Z$$

wo

$$Z = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)}(\zeta' - \zeta\cos H)\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}$$

und dies ist die Gleichung, in deren Integration unsere Aufgabe besteht.

2.

Wir bemerken sogleich die Analogie der Gleichung 4) mit der Gleichung 3) in Abh. I für ϱ; wir schliessen daraus, dass hier in bezug auf die Form, unter der sich die Funktion ζ darstellen wird, dieselben Verhältnisse gelten werden, wie wir sie bei Berechnung der Funktion ϱ in Abh. I kennen gelernt haben; ich verweise deswegen auf die dort § 2 gemachten Bemerkungen. ζ wird demnach elementäre Glieder der Form B) und charakteristische der Form D) enthalten.

Wir zerlegen nun ζ ebenso wie ϱ in zwei Teile, indem wir setzen

$$\zeta = (\zeta) + \mathfrak{Z}$$

wo (ζ) alle Glieder elementärer Form umschliesst.

Die Form, die wir der Function (ϱ) in Abh. I. Gl. 8) gegeben haben, wollen wir auch hier für (ζ) einführen, mit gewissen Modificationen, die sich teils aus der Natur der Gleichung 4), teils aus dem Wesen der Funktion ζ ergeben; nämlich

5) $$(\zeta) = \sin\iota\sin[(1+\tau)v - \Theta] + \Sigma\sin\iota_n\sin[(1+\tau_n)v - \Theta_n]$$

wo $\sin\iota$ und Θ die Integrationskonstanten, und die $\sin\iota_n$ mindestens vom ersten Grade sind. Die τ_n sind von der Ordnung der störenden Masse, und spielen hier dieselbe Rolle, wie die ς_n in Abh. I. Die Grösse τv drückt gewissermaassen die Bewegung des Knotens aus; da diese Bewegung im entgegengesetzten Sinne stattfindet, wie die Bewegung der Apsiden, so haben wir hier das Pluszeichen vor den τ_n.

In Abh. I. § 3 hatten wir (ϱ) auf die Form

$$(\varrho) = \eta\cos\mathrm{v}$$

gebracht; hier setzen wir analog

6) $$(\zeta) = \sin j\sin\mathfrak{v}$$

wo

$$\mathfrak{v} = (1+\tau)v - \sigma$$

und wo wir haben

$$7) \qquad \begin{aligned} \sin j \cos \sigma &= \sin \iota \cos \Theta + \Sigma \sin \iota_n \cos [(\tau - \tau_n) v + \Theta_n] \\ \sin j \sin \sigma &= \sin \iota \sin \Theta + \Sigma \sin \iota_n \sin [(\tau - \tau_n) v + \Theta_n]. \end{aligned}$$

Was die Funktion $\mathfrak{Z}$ betrifft, so werden hier, wie in R, die Hauptglieder von der Form D) sein. Im übrigen wird man bemerken, dass alle Glieder der Gleichung 4) mit einer der Funktionen $\mathfrak{z}$ oder $\mathfrak{z}'$ multiplicirt, also mindestens vom ersten Grade sind. Es werden deshalb in $\mathfrak{Z}$ und auch in der vollständigen Funktion $\mathfrak{z}$ keine Glieder nullten Grades vorkommen. Dieser Umstand hat seinen Grund darin, dass bei verschwindenden Neigungen auch die Störungen der Bahnebene verschwinden; dagegen werden andrerseits die Störungen im Radiusvektor nicht Null bei verschwindenden Excentricitäten.

Es findet sich ferner in der betreffenden Gleichung für ϱ auf der rechten Seite die Funktion S, die an und für sich schon vergrösserte Glieder zweiten Grades von der Form C) enthält; diese Glieder fanden wir nur sehr wenig geändert durch die Integration in R wieder; in der Gleichung für $\mathfrak{z}$ nun steht S nicht rechter Hand, und es wird also $\mathfrak{z}$ auch keine Glieder zweiten Grades enthalten, welche gross im Verhältnisss zur störenden Masse sind, oder, wie wir uns in Abh. I ausdrückten, welche nicht rein von der ersten Ordnung wären.

In der That sind diese Glieder zweiten Grades, wie ich mich überzeugt habe, so unbedeutend, dass wir sie hier ganz bei Seite lassen werden. Wir werden uns daher nur mit den Gliedern ersten Grades beschäftigen.

3.

Ehe wir jetzt zur Integration der Gleichung 4) übergehen, müssen wir den Ausdruck von Z als Funktion von v entwickeln. Hierzu verweise ich zunächst auf Herrn Harzers genannte Abhandlung pag. 33 wo die Entwicklung gegeben ist:

$$8) \qquad \frac{m_1}{m'} \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H} = \sum (-1)^\nu X_{(0.s.s')_{\nu,\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^\nu X_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}} \varrho^s \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos n H.$$

Die von Herrn Harzer mit $R_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}}$ bezeichneten Coefficienten nenne ich hier $X_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}}$; dieselben sind nach den a. a. O. angegebenen Formeln numerisch zu berechnen.

Durch Multiplication mit $\cos H$ leitet man nun aus der obigen Entwicklung die folgende ab

9) $$\frac{m_1}{m'}\frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\cos H = \sum(-1)^\nu Y_{(0.s.s')_{\nu,\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^\nu Y_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}}\varrho^s\varrho'^{s'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH$$

wo

I. $$Y_{(0.s.s')_{\nu,\nu'}} = X_{(1.s.s')_{\nu,\nu'}}$$
$$Y_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}} = \tfrac{1}{2}\left\{X_{(n-1.s.s')_{\nu,\nu'}} + X_{(n+1.s.s')_{\nu,\nu'}}\right\}.$$

Wir müssen nun die Ausdrücke 8) und 9) ebenso umformen, wie wir es in Abh. I mit P und Q gethan haben, und sie als Funktion von nur v darstellen. Diese Transformation lässt sich aus der Analogie von 8) und 9) mit dem Ausdruck 16) in Abh. I unmittelbar schliessen; da wir aber hier nur der Glieder nullten Grades bedürfen, so können wir uns einfach darauf beschränken zu schreiben:

10) $$\frac{m_1}{m'}\frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H} = 2\Sigma' X_{n.0.0}\cos n\mathrm{w}$$

11) $$\frac{m_1}{m'}\frac{r^2}{a(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial\cos H}\cos H = 2\Sigma' Y_{n.0.0}\cos n\mathrm{w}$$

wo ich in Erinnerung bringe, dass der Accent am Σ-Zeichen die Unterdrückung des Faktors 2 für $n = 0$ anzeigt, und dass (s. Abh. I pag. 12, 13, 16)

$$\mathrm{w} = (1-\mu)v - B - U$$
$$B = A' - \mu A$$
$$U = \mu n(T + T_1).$$

Für $\mathfrak{z}'$ haben wir analog Gl. 6) den Ausdruck

$$\mathfrak{z}' = \sin j' \sin \mathfrak{v}'$$

wo

$$\mathfrak{v}' = (1+\tau')v' - \sigma'.$$

Da aber aus gewissen Gründen das Argument $\tau' v'$ herausfällt, so haben wir hier einfach

$$\mathfrak{v}' = v' - \sigma'$$

$\mathfrak{z}'$ ist hier Function von v', wir müssen es als Funktion von v darstellen; dies geschieht nach der schönen von Herrn Gyldén in seinen Vorlesungen gegebenen Transformation, welche ich auch in Abh. I nur kurz habe erwähnen können. Hier, wo wir uns auf die Glieder ersten Grades beschränken, haben wir einfach zu setzen

12) $$\mathfrak{z}' = -\sin j' \sin(\mathrm{w} - \mathfrak{v}_1)$$

wo $$\mathfrak{v}_1 = v - \sigma'$$

ein Resultat, das man leicht erhält, wenn man sich vorstellt, dass

$$v' = \mu v + \Delta' - \mu \Delta + \text{period. Glieder}$$

und dann die Glieder höheren als ersten Grades fortlässt.

Wir haben ferner

13) $$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}.$$

Multipliciren wir jetzt 12) mit 10) und 13) mit 11), und bilden wir die Differenz beider Produkte, so erhalten wir für

$$Z = \frac{r^2}{a(1-\eta^2)} (\mathfrak{z}' - \mathfrak{z} \cos H) \frac{\partial \Omega}{\partial \cos H}$$

den Ausdruck

14)
$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m'} Z = & - \Sigma' Y_{n.0.0} \sin j \sin (n\mathrm{w} + \mathfrak{v}) \\ & + \Sigma' Y_{n.0.0} \sin j \sin (n\mathrm{w} - \mathfrak{v}) \\ & + \Sigma' X_{n.0.0} \sin j' \sin [(n-1)\mathrm{w} + \mathfrak{v}_1] \\ & - \Sigma' X_{n.0.0} \sin j' \sin [(n+1)\mathrm{w} - \mathfrak{v}_1] \\ & - 2 \Sigma' Y_{n.0.0} \mathfrak{Z} \cos n\mathrm{w} \end{aligned}$$

wo alle Glieder zweiten Grades, sowie alle solche, für welche ich die Bezeichnung „rein von der zweiten Ordnung“ vorgeschlagen habe, vernachlässigt sind.

4.

Wir wollen nun die Argumente im Ausdrucke 14) untersuchen, gerade so, wie wir in Abh. I. § 6 die Entwicklungen von P und Q untersucht haben, um festzustellen, unter welchen Bedingungen dieselben eine der Formen B) oder D) annehmen. Es ist leicht zu übersehen, dass die elementären Glieder ersten Grades, also die von der Form B), abgesehen von konstanten Faktoren die Gestalt

$$\sin j \sin \mathfrak{v} \quad \text{und} \quad \sin j' \sin \mathfrak{v}_1$$

haben, während die charakteristischen, d. h. die von der Form D) die Gestalt

$$\sin j \sin (3\mathrm{w} - \mathfrak{v}) \quad \text{und} \quad \sin j' \sin (3\mathrm{w} - \mathfrak{v}_1)$$

annehmen.

Hiernach lässt sich offenbar der Hauptteil der Funktion $\mathfrak{Z}$ in derselben Weise darstellen, wie R_1 durch den Ausdruck 26) in Abh. I, nämlich

15) $$\mathfrak{Z}_1 = \varepsilon_1 \sin j \sin (3\mathrm{w} - \mathfrak{v}) + \varepsilon_2 \sin j' \sin (3\mathrm{w} - \mathfrak{v}_1)$$

wo ich, wie früher, die griechischen Buchstaben ε_1 und ε_2 angewendet habe, um anzudeuten, dass diese Coefficienten gross sein können im Verhältniss zu der Potenz der störenden Masse — hier der ersten —, die sie enthalten.

Wenn wir jetzt das in 14) vorkommende Produkt

$$\begin{aligned} -2\Sigma' Y_{n.0.0}\mathfrak{Z}_1 \cos nw = {} & \Sigma' Y_{n.0.0}\varepsilon_1 \sin j \sin[(n-3)w + \mathfrak{v}] \\ & - \Sigma' Y_{n.0.0}\varepsilon_1 \sin j \sin[(n+3)w - \mathfrak{v}] \\ & + \Sigma' Y_{n.0.0}\varepsilon_2 \sin j' \sin[(n-3)w + \mathfrak{v}_1] \\ & - \Sigma' Y_{n.0.0}\varepsilon_2 \sin j' \sin[(n+3)w - \mathfrak{v}_1] \end{aligned}$$

betrachten, so zeigt sich wieder, dass dasselbe zwar zweiter Ordnung ist, aber doch infolge der kleinen Divisoren, die $\mathfrak{Z}_1$ enthält, seinem Betrage nach erheblich grösser sein kann, als das Quadrat der Masse; es liegen hier ganz dieselben Verhältnisse vor, wie wir sie in Abh. I. pag. 17 untersucht haben. Solche Glieder dürfen wir, wie schon früher erwähnt, nicht in einer ersten Annäherung bei Seite lassen, d. h. wir dürfen nicht die Annäherungen allgemein nach den Potenzen der störenden Massen anordnen.

Berücksichtigen wir nun im letztangeführten Ausdruck nur die Glieder der Formen B) und D), so ist

16)
$$\begin{aligned} -2\Sigma' Y_{n.0.0}\mathfrak{Z}_1 \cos nw = {} & -Y_{0.0.0}\varepsilon_1 \sin j \sin(3w - \mathfrak{v}) \\ & + Y_{3.0.0}\varepsilon_1 \sin j \sin \mathfrak{v} \\ & - Y_{0.0.0}\varepsilon_2 \sin j' \sin(3w - \mathfrak{v}_1) \\ & + Y_{3.0.0}\varepsilon_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1. \end{aligned}$$

Setze ich also:

$$Z = D_1 \sin j \sin \mathfrak{v} + D_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1 + D_3 \sin j \sin(3w - \mathfrak{v}) + D_4 \sin j' \sin(3w - \mathfrak{v}_1)$$

so ist nach 14) und 16)

II.
$$\begin{aligned} D_1 &= -Y_{0.0.0} + Y_{3.0.0}\varepsilon_1 & D_3 &= Y_{3.0.0} - Y_{0.0.0}\varepsilon_1 \\ D_2 &= X_{1.0.0} + Y_{3.0.0}\varepsilon_2 & D_4 &= -X_{2.0.0} - Y_{0.0.0}\varepsilon_2. \end{aligned}$$

5.

Wir können nun endlich zur unmittelbaren Integration der Gleichung 4) übergehen; dieselbe schreiben wir, indem wir die Glieder von höherem als ersten Grade und alle, welche rein von der zweiten Ordnung sind, fortlassen, wie folgt:

17)
$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = \frac{dS}{dv}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} + \frac{dS}{dv}\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dv} + Z.$$

Aehnlich wie in Abh. I bei Integration der Gleichung 33) können wir hier setzen, indem wir bei der Differentiation die langperiodischen Funktionen $\sin j$ und σ wie Konstante behandeln:

$$\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = (1+\tau)\sin j' \cos \mathfrak{v}$$

$$\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dv} = (1-\delta-\tau)\varepsilon_1 \sin j \cos(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}) + (1-\delta)\varepsilon_2 \sin j' \cos(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}_1).$$

Der hier in Betracht kommende Teil von $\frac{dS}{dv}$ ist

$$-\Sigma A_{0.0}(n.-n)\sin n\mathfrak{w}$$

und es wird also

$$\frac{dS}{dv}\frac{d(\mathfrak{z})}{dv} = -\tfrac{1}{2}(1+\tau)A_{0.0}(3.-3)\sin j \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v})$$

$$\frac{dS}{dv}\frac{d\mathfrak{Z}_1}{dv} = -\tfrac{1}{2}(1-\delta-\tau)A_{0.0}(3.-3)\varepsilon_1 \sin j \sin \mathfrak{v} - \tfrac{1}{2}(1-\delta)A_{0.0}(3.-3)\varepsilon_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1.$$

Wenn wir jetzt für 17) schreiben

18) $$\frac{d^2\mathfrak{z}}{dv^2} + \mathfrak{z} = E_1 \sin j \sin \mathfrak{v} + E_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1 + E_3 \sin j \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}) + E_4 \sin j' \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}_1)$$

so wird also

III. $$E_1 = D_1 - \tfrac{1}{2}(1-\delta-\tau)A_{0.0}(3.-3)\varepsilon_1 \qquad E_3 = D_3 - \tfrac{1}{2}(1+\tau)A_{0.0}(3.-3)$$
$$E_2 = D_2 - \tfrac{1}{2}(1-\delta)A_{0.0}(3.-3)\varepsilon_2 \qquad E_4 = D_4.$$

Differenziren wir den Ausdruck

19) $$\mathfrak{Z}_1 = \varepsilon_1 \sin j \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}) + \varepsilon_2 \sin j' \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}_1)$$

und sehen wir dabei wieder $\sin j$, $\sin j'$, σ und σ' als konstant an, so erhalten wir

20) $$\frac{d^2\mathfrak{Z}_1}{dv^2} = -\left(3\frac{d\mathfrak{w}}{dv} - 1 - \tau\right)^2 \varepsilon_1 \sin j \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}) - \left(3\frac{d\mathfrak{w}}{dv} - 1\right)^2 \varepsilon_2 \sin j' \sin(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}_1) + 3\varepsilon_1 \sin j \cos(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v})\frac{d^2\mathfrak{w}}{dv^2} + 3\varepsilon_2 \sin j' \cos(3\mathfrak{w}-\mathfrak{v}_1)\frac{d^2\mathfrak{w}}{dv^2}.$$

Wir haben nun, wie in Abh. I. pag. 21

$$\frac{dw}{dv} = 1 - \mu - \mu \frac{dW}{dv}$$

und können hier setzen

$$\frac{d^2 w}{dv^2} = \Sigma n \mu (1-\mu) W_{0.0}(n.-n) \sin nw$$

$$\left(3\frac{dw}{dv} - 1 + \tau\right)^2 = (1-\delta-\tau)^2 - 6\mu(1-\delta-\tau)\Sigma W_{0.0}(n.-n)\cos nw$$

$$\left(3\frac{dw}{dv} - 1\right)^2 = (1-\delta)^2 - 6\mu(1-\delta)\Sigma W_{0.0}(n.-n)\cos nw.$$

Gleichung 20) geht hiermit über in die folgende, da $W_{0.0}(0.0) = 0$,

21)
$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathfrak{Z}_1}{dv^2} = &-(1-\delta-\tau)^2 \varepsilon_1 \sin j \sin(3w - \mathfrak{v}) \\ &-(1-\delta)^2 \varepsilon_2 \sin j' \sin(3w - \mathfrak{v}_1) \\ &-\left\{3\mu(1-\delta-\tau) - \tfrac{3}{2}\mu(1-\mu)\right\}\varepsilon_1 W_{0.0}(3.-3)\sin j \sin \mathfrak{v} \\ &-\left\{3\mu(1-\delta) - \tfrac{3}{2}\mu(1-\mu)\right\}\varepsilon_2 W_{0.0}(3.-3)\sin j' \sin \mathfrak{v}_1.\end{aligned}$$

Die in $W_{0.0}(3.-3)$ multiplicirten Glieder sind nun aber rein von der zweiten Ordnung, da der Faktor

$$3\mu(1-\delta) - \tfrac{3}{2}\mu(1-\mu),$$

wie schon in Abh. I gezeigt, von der Ordnung δ ist; diese Glieder fallen deswegen auch hier fort.

Addiren wir jetzt 19) und 21), so kommt

22)
$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathfrak{Z}_1}{dv^2} + \mathfrak{Z}_1 = &[2(\delta+\tau) - (\delta+\tau)^2]\varepsilon_1 \sin j \sin(3w - \mathfrak{v}) \\ &+ [2\delta - \delta^2]\varepsilon_2 \sin j' \sin(3w - \mathfrak{v}_1).\end{aligned}$$

Setzen wir in Gl. 18)

$$\mathfrak{z} = (\mathfrak{z}) + \mathfrak{Z}$$

und vergleichen dann 18) mit 22), so ergiebt sich

$$\text{IV.} \quad [2(\delta+\tau) - (\delta+\tau)^2]\varepsilon_1 = E_3 \qquad (2\delta - \delta^2)\varepsilon_2 = E_4$$

und mit Berücksichtigung von II. und III.

$$\varepsilon_1 = \frac{Y_{3.0.0} - \frac{1}{2}(1+\tau) A_{0.0}(3.-3)}{[2(\delta+\tau) - (\delta+\tau)^2] + Y_{0.0.0}}$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{X_{2.0.0}}{2\delta - \delta^2 + Y_{0.0.0}}.$$

Durch weitere Vergleichung von 18) und 22) ergiebt sich andrerseits

$$23) \qquad \frac{d^2(\lambda)}{dv^2} + (\lambda) = E_1 \sin j \sin \mathfrak{v} + E_2 \sin j' \sin \mathfrak{v}_1$$

wo die Coefficienten E_1 und E_2 bekannt sind.

Wir erinnern uns jetzt wieder, dass (λ) die Form hat

$$(\lambda) = \sin j \sin \mathfrak{v} = \Sigma \sin \iota_n \sin[(1+\tau_n)v - \Theta_n]$$

wo das Glied $\sin \iota \sin[(1+\tau)v - \Theta]$ durch $\sin \iota_n \sin[(1+\tau_n)v - \Theta_n]$ für $n = 0$ dargestellt werden soll.

Hieraus bildet man unmittelbar

$$24) \qquad \frac{d^2(\lambda)}{dv^2} + (\lambda) = -\Sigma(2\tau_n + \tau_n^2) \sin \iota_n \sin[(1+\tau_n)v - \Theta_n].$$

Wir haben weiter analog der Gleichung für $\eta' \cos \mathfrak{v}_1$ in Abh. I. pag. 23

$$\sin j' \sin \mathfrak{v}_1 = \Sigma \sin \iota'_n \sin[(1+\mu\tau'_n)v - \Theta'_n]$$

oder, wenn wir bedenken, dass alle diese Argumente $(1+\mu\tau'_n)v - \Theta'_n$ auch in (λ) vorkommen müssen

$$25) \qquad \sin j' \sin \mathfrak{v}_1 = \Sigma \sin \iota'_n \sin[(1+\tau_n)v - \Theta_n]$$

wo also

$$\begin{aligned} \sin \iota'_0 &= 0 & \sin \iota'_1 &= \sin \iota' \\ \tau_n &= \mu\tau'_n & \Theta_n &= \Theta'_n \\ \tau'_1 &= \tau' = 0 & \tau_1 &= 0 \end{aligned}$$

Gleichung 23) geht hiermit über in

$$26) \qquad \frac{d^2(\lambda)}{dv^2} + (\lambda) = \Sigma(E_1 \sin \iota_n + E_2 \sin \iota'_n) \sin[(1+\tau_n)v - \Theta_n]$$

und durch Vergleichung von 26) mit 24) erhalten wir

$$\text{V.} \qquad \sin \iota_n = -\frac{E_2 \sin \iota'_n}{2\tau_n + \tau_n^2 + E_1}.$$

Man wird weiterhin bemerken, dass E_1 nahe gleich $-E_2$ ist, und da $\tau_1 = 0$, so wird auch $\sin \iota_1$ sehr angenähert gleich $\sin \iota'$ sein.

Die Funktion (λ) ist nun bekannt.

Für $n = 0$ hat man aus V., ähnlich, wie für ς in Abh. I., die Relation

$$\text{VI.} \qquad 2\tau + \tau^2 + E_1 = 0$$

woraus sich τ bestimmt.

Ich will nun noch den Teil der Funktion $\mathfrak{Z}$ ableiten, der von keiner der Formen B) oder D) ist, und dessen Einfluss in manchen Fällen merkbar werden kann. Wir betrachten hier wieder Gleichung 17), indem wir alle Glieder zweiter Ordnung fortlassen, da deren numerischer Betrag klein ist, und setzen also

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z} = \frac{dS}{dv}\frac{d(\mathfrak{Z})}{dv} + Z.$$

Da nun wieder

$$\frac{dS}{dv} = -\Sigma A_{0.0}(n.-n)\sin n\mathrm{w}$$

und

$$\frac{d(\mathfrak{Z})}{dv} = (1+\tau)\sin j\cos\mathfrak{v}$$

so wird

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dv}\frac{d(\mathfrak{Z})}{dv} = &-\tfrac{1}{2}(1+\tau)\Sigma A_{0.0}(n.-n)\sin j\sin(n\mathrm{w}+\mathfrak{v})\\ &-\tfrac{1}{2}(1+\tau)\Sigma A_{0.0}(n.-n)\sin j\sin(n\mathrm{w}-\mathfrak{v}).\end{aligned}$$

Bedenken wir ausserdem die Entwicklung 14), so wird

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} + \mathfrak{Z} = &-\Sigma'\{Y_{n.0.0} + \tfrac{1}{2}(1+\tau)A_{0.0}(n.-n)\}\sin j\sin(n\mathrm{w}+\mathfrak{v})\\ &+\Sigma'\{Y_{n.0.0} - \tfrac{1}{2}(1+\tau)A_{0.0}(n.-n)\}\sin j\sin(n\mathrm{w}-\mathfrak{v})\\ &+\Sigma' X_{n.0.0}\sin j'\sin[(n-1)\mathrm{w}+\mathfrak{v}_1]\\ &-\Sigma' X_{n.0.0}\sin j'\sin[(n+1)\mathrm{w}-\mathfrak{v}_1]\end{aligned}$$

woraus durch Integration sich ergiebt, wenn wir wieder $\sin j$, $\sin j'$, σ und σ' als Konstante ansehen:

$$\begin{aligned}\text{VII.}\quad \mathfrak{Z} = &-\Sigma'\frac{Y_{n.0.0} + \tfrac{1}{2}(1+\tau)A_{0.0}(n.-n)}{1-[n(1-\mu)+1+\tau]^2}\sin j\sin(n\mathrm{w}+\mathfrak{v})\\ &+\Sigma'\frac{Y_{n.0.0} - \tfrac{1}{2}(1+\tau)A_{0.0}(n.-n)}{1-[n(1-\mu)-1-\tau]^2}\sin j\sin(n\mathrm{w}-\mathfrak{v})\\ &+\Sigma'\frac{X_{n.0.0}}{1-[(n-1)(1-\mu)+1]^2}\sin j'\sin[(n-1)\mathrm{w}+\mathfrak{v}_1]\\ &-\Sigma'\frac{X_{n.0.0}}{1-[(n+1)(1-\mu)-1]^2}\sin j'\sin[(n+1)\mathrm{w}-\mathfrak{v}_1)\end{aligned}$$

wo nun aber alle diejenigen n-Werte, für welche eines der Argumente die Form B) oder D) annimmt, übergangen werden müssen.

Der Betrag dieser Glieder ist in unserem Falle ausserordentlich gering; dasselbe gilt aber nicht, wie aus den in Abh. I. angeführten Werten ersichtlich

ist, von den Funktionen R und nT, wo die Glieder dieser Art vielmehr recht beträchtlich werden können.

Ich schalte hier diese Bemerkung ein, um ausdrücklich darauf aufmerksam zu machen, dass man in jedem Falle diese Glieder in Rücksicht ziehen muss. Es hat keine Schwierigkeiten, ihre Ausdrücke herzuleiten; ich habe sie in Abh. I. nicht ausdrücklich angeführt, man wird sie in derselben Weise erhalten, wie wir die Relation VII. hier abgeleitet haben. Da sie im allgemeinen mit wachsenden n sehr stark an Grösse abnehmen, so kann man sich auf äusserst wenige beschränken. Die diesen Gliedern entsprechenden Ungleichheiten sind diejenigen, die sich während eines kürzeren Zeitraumes am stärksten ausgeprägt zeigen.

6.

Mit Hülfe der Relationen, die wir hier abgeleitet haben, können wir unmittelbar die numerische Rechnung ausführen; ich führe hier mein Beispiel, die Anwendung auf den Planeten Hestia weiter. Mit Annahme des in Abh. I. pag. 38 gegebenen Wertes für α, und mittels der in Herr Harzers oben genannter Abhandlung pag. 33 gegebenen Formel, nämlich:

$$X_{n.0.0} = \gamma_0^{3.n} - [\alpha^2]$$

wo das Glied $-[\alpha^2]$ nur für $n = 0$ hinzuzufügen ist, erhielt ich

n	$\log X_{n.0.0}$
0	6.262777
1	6.434315
2	6.203338
3	5.94913
4	5.68196
5	5.40647
6	5.12520

und nach I.

n	$\log Y_{n.0.0}$
0	6.434315
1	6.234074
2	6.256223
3	6.016598
4	5.75756
5	5.48728
6	5.20963

Diese Coefficienten sind bereits mit der Jupitersmasse, die ich zu $\frac{1}{1048.00}$ angenommen habe, multiplicirt; ihnen allen ist -10 anzuhängen.

Wir finden weiter nach II.

II.
$$\begin{aligned} D_1 &= -[6.434315] + [6.01660]\,\varepsilon_1 & D_3 &= +[6.016598] - [6.43432]\,\varepsilon_1 \\ D_2 &= +[6.434315] + [6.01660]\,\varepsilon_2 & D_4 &= -[6.203338] - [6.43432]\,\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Um nun nach III. die E-Coefficienten exact berechnen zu können, müssen wir einen Näherungswert von τ kennen; ein solcher ist nach VI.

$$\tau = -\tfrac{1}{2} E_1$$

oder mit Berücksichtigung von II.—IV.

$$\tau = \tfrac{1}{2} Y_{0.0.0} - \frac{1}{4\delta}[Y_{3.0.0} - \tfrac{1}{2} A_{0.0}(3.-3)]^2.$$

Es ist also sehr nahe

$$[\log \tau = 6.13195].$$

Jetzt erhalten wir aus III.

III.
$$\begin{aligned} E_1 &= -[6.434315] + [6.20099]\,\varepsilon_1 & E_3 &= +[6.203358] - [6.43432]\,\varepsilon_1 \\ E_2 &= +[6.434315] + [6.20101]\,\varepsilon_2 & E_4 &= -[6.203338] - [6.43432]\,\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung ergiebt, da $\log \delta = 8.184500$

IV.
$$[8.485998]\,\varepsilon_1 = E_3 \qquad [8.482196]\,\varepsilon_2 = E_4$$

also durch Verbindung von III. und IV.

$$\varepsilon_1 = +[7.713521] \qquad \varepsilon_2 = -[7.717270]$$

womit nun auch

$$E_1 = -[6.433000] \qquad E_2 = +[6.432989]$$

bekannt sind.

Für τ erhalten wir sofort aus VI.

$$\tau = [6.131940]$$

fast genau übereinstimmend mit obigem Näherungswert.

Um jetzt die Coefficienten $\sin \iota_n$ zu berechnen, müssen uns die $\sin \iota'_n$ aus der Theorie für Jupiter bekannt sein. Es ist

28)
$$\begin{aligned} \sin j' \cos \sigma' &= \sin \iota' \cos \Theta' + \sin \iota'_2 \cos(\Theta'_2 - \tau'_2 v') + \sin \iota'_3 \cos(\Theta'_3 - \tau'_3 v') + \sin \iota'_4 \cos(\Theta'_4 - \tau'_4 v') \\ \sin j' \sin \sigma' &= \sin \iota' \sin \Theta' + \sin \iota'_2 \sin(\Theta'_2 - \tau'_2 v') + \sin \iota'_3 \sin(\Theta'_3 - \tau'_3 v') + \sin \iota'_4 \sin(\Theta'_4 - \tau'_4 v') \end{aligned}$$

Die Glieder mit den Indices 2, 3 und 4 entsprechen den Einwirkungen der Planeten Saturn, Uranus und Neptun. Bei der Berechnung von ϱ in Abh. I

hatten wir das mit $\varkappa_4$ multiplicirte dem Neptun entsprechende Glied fortgelassen. Dasselbe ist nämlich ausserordentlich klein, und war auch in dem von Herrn Gyldén berechneten Werte für ϱ' noch nicht berücksichtigt. Leider sind gegenwärtig die Arbeiten Herrn Gyldéns über die gegenseitigen Störungen der grossen Planeten noch nicht so weit vorgeschritten, dass für die Grössen $\sin \iota'_n$ und Θ'_n genauere Werte bekannt sind. Ich muss deshalb die Leverrier'schen Werte anwenden, die auch Herr Harzer benutzt hat. Es ist nach Leverrier „Annales de l'Observatoire de Paris" Mém. T. II. pag. 169

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi^{\mathrm{IV}} \overset{\cos}{\sin} \Theta^{\mathrm{IV}} = &+ [8.43944] \overset{\cos}{\sin} 106^0.171 \\ &- [7.79975] \overset{\cos}{\sin} [126^0.039 - 25''.952538\,(t-T)] \\ &+ [7.0641] \overset{\cos}{\sin} [135^0.019 - 3''.106931\,(t-T)] \\ &- [7.1801] \overset{\cos}{\sin} [201^0.595 - 0''.756015\,(t-T)] \end{aligned}$$

wo $T = 1850$ Jan. 1.0 mittlere Zeit Paris, und $t-T$ in julianischen Jahren auszudrücken ist. Die Grössen beziehen sich auf die feste Ekliptik zur Zeit T, die auch wir deswegen als Grundebene behalten.

Es soll nun statt der Zeit t in obige Argumente die Länge v' des Jupiter in seiner Bahn eingeführt werden.

Er ist, wenn wir von den periodischen Gliedern absehen

$$t - T = \frac{v' - A'}{n'.365.25}$$

wo n' die mittlere tägliche Bewegung Jupiters bedeutet.

Nun ist nach Leverrier

$$\begin{aligned} A' &= 160^0.017 \\ n' &= 299''.12836 \end{aligned}$$

also nach unserer Zählweise (vgl. Abh. I.)

$$A' = -559^0.983.$$

Es wird demnach, wenn wir Leverriers $\operatorname{tg} \varphi^{\mathrm{IV}} \overset{\cos}{\sin} \Theta^{\mathrm{IV}}$ mit unserem $\operatorname{tg} j' \overset{\cos}{\sin} \sigma'$ identificiren:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} j' \overset{\cos}{\sin} \sigma' = &+ [8.43944] \overset{\cos}{\sin} 106^0.171 \\ &- [7.79975] \overset{\cos}{\sin} \{125^0.906 - [6.37573]\, v'\} \\ &+ [7.0641] \overset{\cos}{\sin} \{135^0.003 - [5.45388]\, v'\} \\ &- [7.1801] \overset{\cos}{\sin} \{201^0.591 - [4.84008]\, v'\} \end{aligned}$$

Wenn wir diese beiden Ausdrücke $\operatorname{tg} j' \cos \sigma'$ und $\operatorname{tg} j' \sin \sigma'$ quadriren und addiren, wobei wir nur den constanten Teil berücksichtigen, da ja der ganze Ausdruck höheren als ersten Grades wird, so kommt

$$\operatorname{tg}^2 j' = [6.90310]$$

also

$$\cos j' = [9.99983]$$

Multipliciren wir diesen Wert mit obigem Ausdruck, so erhalten wir die der Relation 28) entsprechenden numerischen Werte, wie folgt:

$\log \sin \iota' = 8.43927$	$\Theta' = 106^0.171$	$\tau' = 0$
$-\sin \iota'_2 = 7.79958_n$	$\Theta'_2 = 125^0.906$	$\log \tau'_2 = [6.37573]$
$-\sin \iota'_3 = 7.0639$	$\Theta'_3 = 135^0.003$	$-\tau'_3 = [5.45388]$
$-\sin \iota'_4 = 7.1799_n$	$\Theta'_4 = 201^0.591$	$-\tau'_4 = [4.84008]$

Es ergeben sich hieraus für die Grössen

$$\tau_n = \mu \tau'_n$$

die Werte

$$\begin{aligned} \tau_1 &= 0 \\ \log \tau_2 &= 5.90520 \\ \log \tau_3 &= 4.98335 \\ \log \tau_4 &= 4.36955 \end{aligned}$$

und mit Anwendung der Relationen V. wird nun

$$\begin{aligned} \log \sin \iota_1 &= 8.43927 \\ -\sin \iota_2 &= 8.19026_n \\ -\sin \iota_3 &= 7.0959 \\ -\sin \iota_4 &= 7.1875_n \end{aligned}$$

Schliesslich führe ich noch die Hauptglieder an, die uns die Formel VII. liefert, nämlich:

29)
$$\begin{aligned} \operatorname{pars} \mathfrak{Z} = &+ [6.316] \sin j \sin (w - \upsilon) \\ &+ [6.482] \sin j \sin (2w - \upsilon) \\ &- [6.316] \sin j' \sin (w - \upsilon_1) \\ &- [6.482] \sin j' \sin (2w - \upsilon_1) \end{aligned}$$

wie man sieht, sind diese Glieder nahezu verschwindend.

7.

Es sollen nun die gefundenen Resultate in übersichtlicher Form zusammen-

gestellt werden. Ebenso, wie die Funktionen η und η', so ändern sich auch $\sin j$ und $\sin j'$ nur sehr langsam mit der Zeit; dieselben können gegenwärtig ausgedrückt werden durch

$$\sin j = [8.60300]\,\mathrm{I}$$
$$\sin j' = [8.36040]\,\mathrm{I}'$$

wo I und I′ nahe gleich der Einheit sind.

Unsere Ergebnisse sind die folgenden:

$$\log \tau = 6.131940$$

$$30)\quad \sin j \overset{\cos}{\sin} \sigma = \sin \iota \overset{\cos}{\sin} \Theta + [8.43927] \overset{\cos}{\sin} (\tau v + \Theta_1) - [8.19026] \overset{\cos}{\sin} [(\tau - \tau_2) v + \Theta_2]$$
$$+ [7.0959] \overset{\cos}{\sin} [(\tau - \tau_3) v + \Theta_3] - [7.1875] \overset{\cos}{\sin} [(\tau - \tau_4) v + \Theta_4]$$
$$\mathfrak{Z} = [6.31652]\,\mathrm{I} \sin (3\,\mathrm{w} - \mathfrak{v}) - [6.07767]\,\mathrm{I}' \sin (3\,\mathrm{w} - \mathfrak{v}_1)$$

wo ich in Erinnerung bringe

$$\mathfrak{v} = (1+\tau) v - \sigma \qquad \mathfrak{v}_1 = v - \sigma' \qquad \mathrm{w} = (1-\mu) v - B - U$$
$$B = A' - \mu A \qquad U = \mu n (T + T_1).$$

Den Teil von $\mathfrak{Z}$, der durch 29) gegeben ist, lassen wir seiner ausserordentlichen Kleinheit wegen, bei Seite.

Wenn wir nun bedenken, dass

$$\sin b = \mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}.$$

so können wir für jeden Wert von v nun auch die Breite des Planeten über der als Grundebene angenommenen festen Ekliptik berechnen, vorausgesetzt, dass die beiden Integrationskonstanten $\sin \iota$ und Θ bekannt sind.

Mit der Bestimmung dieser Konstanten wollen wir uns jetzt beschäftigen. Wir benutzen dabei wieder dieselben im Berliner Astronomischen Jahrbuch nach den Berechnungen Herrn Karlinski's angegebenen osculirenden Elemente, wie in Abh. I. Die im Jahrbuch mitgeteilten Werte, die hier in Frage kommen, sind, reducirt auf unsere Grundebene, die folgenden:

Ep. u. Osc.	i	$\omega = \Pi - \Omega$	Ω
1865 Juli 26.0	2° 17′ 39″.6	172° 44′ 26″.1	181° 12′ 58″.9
1880 März 29.0	2° 17′ 44″.4	172° 55′ 46″.4	181° 0′ 58″.0
1886 December 3.0	2° 17′ 49″.8	172° 51′ 4″.7	180° 54′ 48″.3.

Nenne ich u den Abstand des Planeten in seiner Bahn vom Knoten mit der festen Grundebene, also das Argument der Breite, so ist:

31) $$\mathfrak{z} = \sin b = \sin i \sin u$$

also auch

32) $$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = \sin i \cos u.$$

Wir haben

$$u = v - \Omega$$

und können nun aus den gegebenen osculirenden Elementen die Grössen $\mathfrak{z}$ und $\frac{d\mathfrak{z}}{dv}$ für die betreffenden Epochen berechnen. Ich will hier das Beispiel für die Epoche 1865 Juli 26.0 durchführen. Es fand sich

33) $$\mathfrak{z} = +[8.53398] \qquad \frac{d\mathfrak{z}}{dv} = -[8.31834].$$

Aus den Ausdruck 30) für $\mathfrak{Z}$ bildet man leicht

34) $$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = [6.30977]\,\mathrm{I}\cos(3\mathrm{w} - \mathfrak{v}) - [6.07098]\,\mathrm{I}'\cos(3\mathrm{w} - \mathfrak{v}_1).$$

Wenn wir nun in den Relationen 28) rechter Hand die bekannten Werte einsetzen, so erhalten wir

$$\log \sin j' = 8.36042$$
$$\log \mathrm{I}' = 0.00002$$
$$\sigma' = 98^\circ.446$$

woraus also

$$\mathfrak{v}_1 = 204^\circ.097.$$

Es ist nun auch

$$\mathfrak{v} = -57^\circ.562 - \sigma$$

und

$$w = 34^\circ.869$$

wie bereits aus Abh. I bekannt ist.

Wir nehmen nun für σ einen Näherungswert nahe gleich Ω an, und setzen

$$\sigma = 181^\circ.250 + \Delta\sigma$$

also auch

$$\mathfrak{v} = 121^\circ.188 + \Delta\mathfrak{v}$$
$$\Delta\mathfrak{v} = -\Delta\sigma.$$

Ich nenne nun $\mathfrak{Z}_0$ und $\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_0$ diejenigen Werte von $\mathfrak{Z}$ und $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$, die sich ergeben, wenn man für $\mathfrak{v}$ den Näherungswert $\mathfrak{v}_0 = 121^\circ.188$ einsetzt. Berechnen wir dieselben numerisch für unser Beispiel, indem wir I unbestimmt lassen, und für I′ den oben gefundenen Wert einsetzen, so wird

$$\mathfrak{Z}_0 = +[6.0717] - [5.772]\,\mathrm{I}$$
$$\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_0 = +[5.288] + [6.291]\,\mathrm{I}.$$

Wir haben ferner

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0 + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{v}} \Delta\mathfrak{v} \qquad \frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = \left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)_0 + \frac{\partial\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)}{\partial \mathfrak{v}} \Delta\mathfrak{v}$$

wo die vernachlässigten mit den höheren Potenzen von $\Delta\mathfrak{v}$ multiplicirten Glieder verschwindend klein sind. Wir können ausserdem in den mit $\Delta\mathfrak{v}$ multiplicirten Gliedern $\mathrm{I} = 1$, oder einen besseren etwa vorhandenen Näherungswerth einsetzen und erhalten sofort, da $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial \mathfrak{v}}$ und $\frac{\partial\left(\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right)}{\partial \mathfrak{v}}$ ganz leicht zu berechnen sind

35)
$$\mathfrak{Z} = +[6.0717] - [5.772]\,\mathrm{I} - [6.297]\Delta\mathfrak{v}$$
$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = +[5.288] + [6.291]\,\mathrm{I} - [5.764]\Delta\mathfrak{v}.$$

Wir haben nun

$$\mathfrak{z} = \sin j \sin \mathfrak{v} + \mathfrak{Z}$$

und mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dv} = (1+\tau)\sin j \cos \mathfrak{v} + \frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$$

Setzen wir hier die numerischen Werte 33) und 35) ein, so wird

36)
$$\sin j \sin \mathfrak{v} = +[8.53248] + [5.772]\,\mathrm{I} + [6.297]\Delta\mathfrak{v}$$
$$\sin j \cos \mathfrak{v} = -[8.31869] - [6.291]\,\mathrm{I} + [5.764]\Delta\mathfrak{v}.$$

Quadriren und addiren wir diese beiden Gleichungen, wobei wir die Quadrate und Produkte der kleineren mit I und $\Delta\mathfrak{v}$ multiplicirten Glieder vernachlässigen, so wird

$$\sin^2 j = +[7.20282] + [5.085]\,\mathrm{I} + [5.044]\Delta\mathfrak{v}$$

woraus sich findet

$$\sin j = +[8.60310] + [6.143]\Delta\mathfrak{v}.$$

Das in $\Delta\mathfrak{v}$ multiplicirte Glied liegt gänzlich unterhalb der Grenzen der Merkbarkeit. Ich brauche kaum ausführlicher anzugeben, wie man aus diesen Werten in Verbindung mit 36) die definitiven Werte

$$\log \sin j = 8.60308 \qquad \sigma = 180^0\,48'\,36''$$
$$\Delta\mathfrak{v} = -\Delta\sigma = 26'\,24'' \qquad \mathfrak{v} = 121^0\,37'\,41''$$

findet.

Jetzt können wir mit Hülfe von 30) $\sin\iota$ und Θ direkt zu finden. Ich fand nämlich

$$\log\sin\iota = 8.65327$$
$$\iota = 2^0\,34'\,46''.3$$
$$\Theta = 200^0\,39'\,27''.$$

Indem ich dasselbe Verfahren auf die beiden anderen Epochen anwendete, fand ich für

		$\log\sin j$	σ	ι	Θ
1880 März	29.0	8.60410	$180^0\,50'\,6''$	$2^0\,34'\,51''.4$	$200^0\,39'\,27''$
1886 December	3.0	8.60477	$180^0\,51'\,40''$	$2^0\,34'\,57''.9$	$200^0\,39'\,41''$.

Wie man sieht, stimmen die Resultate sehr gut mit einander überein, und wir nehmen als die wahrscheinlichsten Werte an

$$\iota = 2^0\,34'\,51''.9 \qquad \Theta = 200^0\,39'\,32''.$$

8.

Um aus den bis jetzt abgeleiteten Relationen die Länge l des Planeten in bezug auf die als Grundebene angenommene feste Ekliptik zu berechnen, müsste man mittels der Gleichungen 31) und 32) erst die Lage der momentanen Bahnebene gegen die feste bestimmen. Wir wollen daher einen Ausdruck ableiten, der uns ermöglicht, die Länge l direkt aus der Länge in der Bahn v zu finden.

Betrachten wir das sphärische Dreieck, das aus den Seiten u, $l-\Omega$ und b gebildet wird, so haben wir

$$\operatorname{tg}(l-\Omega) = \cos i \operatorname{tg} u$$

also

$$\frac{dl}{du} = \frac{dl}{dv} = \cos i \frac{\cos^2(l-\Omega)}{\cos^2 u}$$

und da auch

$$\cos u = \cos b \cos(l-\Omega)$$

so ist

$$\frac{dl}{dv} = \frac{\cos i}{\cos^2 b}.$$

Nun ist aber

$$z = \sin b = \sin i \sin u$$
$$\frac{dz}{dv} = \sin i \cos u$$

also

$$\sin i = z^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2.$$

Wir erhalten demnach

$$\frac{dl}{dv} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2-\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2}}{1-\zeta^2}$$

folglich wird

37) $$l = v + \int\left\{\frac{\sqrt{1-\zeta^2-\left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2}}{1-\zeta^2} - 1\right\}dv.$$

Wenn man den Ausdruck unter dem Integralzeichen entwickelt, so erhält man bis auf Glieder vierten Grades exclusive

$$l = v + \tfrac{1}{2}\int\left\{\zeta^2 - \left(\frac{d\zeta}{dv}\right)^2\right\}dv.$$

Bei der hier auszuführenden Quadratur werden nur die Glieder vergrössert, welche den in Abh. I mit A) und C) bezeichneten Formen angehören. Uebrigens habe ich mich überzeugt, dass es, wie in den meisten Fällen, so auch in dem unsrigen, genügt für ζ die Funktion (ζ) einzusetzen.

Nun ist

$$(\zeta) = \sin j \sin \mathfrak{v}$$

und

38) $$\frac{d(\zeta)}{dv} = (1+\tau)\sin j\cos\mathfrak{v} + \sin(1+\tau)v\,\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv} - \cos(1+\tau)v\,\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}.$$

Aus diesen beiden Ausdrücken bildet man mit ausreichender Genauigkeit

39) $$(\zeta)^2 - \left(\frac{d(\zeta)}{dv}\right)^2 = -\tau\sin^2 j - \sin^2 j\cos 2\mathfrak{v} - \sin j\sin\sigma\,\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv} + \sin j\cos\sigma\,\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}.$$

Wir erhalten nun durch Quadriren und Addiren von 7) wenn wir noch die Bezeichnungen

$$\mathfrak{v} = \Omega - \tau v \qquad \mathfrak{v}_n = \Omega_n - \tau_n v$$

einführen, die folgende Relation

$$\begin{aligned}\sin^2 j = {} & \sin^2\iota + \sin^2\iota_1 + \sin^2\iota_2 + \ldots. \\ & + 2\sin\iota\sin\iota_1\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_1) + 2\sin\iota\,\sin\iota_2\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_2) + 2\sin\iota\,\sin\iota_3\cos(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}_3) + \ldots. \\ & + 2\sin\iota_1\sin\iota_2\cos(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_2) + 2\sin\iota_1\sin\iota_3\cos(\mathfrak{v}_1-\mathfrak{v}_3) + \ldots. \\ & + 2\sin\iota_2\sin\iota_3\cos(\mathfrak{v}_2-\mathfrak{v}_3) + \ldots. \\ & + \ldots.\end{aligned}$$

Durch Differentiation von 7) ergiebt sich ferner

$$40)\quad \begin{aligned} \frac{d\sin j\cos\sigma}{dv} &= -\Sigma(\tau-\tau_n)\sin\iota_n\sin(\tau v+\vartheta_n)\\ \frac{d\sin j\sin\sigma}{dv} &= \Sigma(\tau-\tau_n)\sin\iota_n\cos(\tau v+\vartheta_n)\end{aligned}$$

woraus wir erhalten

$$\begin{aligned}\sin j\cos\sigma\frac{d\sin j\sin\sigma}{dv}-\sin j\sin\sigma\frac{d\sin j\cos\sigma}{dv} &= \\ = \tau\sin^2\iota_1+(\tau-\tau_2)\sin^2\iota_2+(\tau-\tau_3)\sin^2\iota_3+\ldots.&\\ +\tau\sin\iota\sin\iota_1\cos(\vartheta-\vartheta_1)+(\tau-\tau_2)\sin\iota\sin\iota_2\cos(\vartheta-\vartheta_2)+\ldots.&\\ +(2\tau-\tau_1-\tau_2)\sin\iota_1\sin\iota_2\cos(\vartheta_1-\vartheta_2)+(2\tau-\tau_1-\tau_3)\sin\iota_1\sin\iota_3\cos(\vartheta_1-\vartheta_3)+\ldots.&\\ +(2\tau-\tau_2-\tau_3)\sin\iota_2\sin\iota_3\cos(\vartheta_2-\vartheta_3)+\ldots.&\\ +\ldots.&\end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte in 39) ein, und integriren wir, so wird

$$\begin{aligned}41)\quad l = v-\tfrac{1}{2}\{\tau\sin^2\iota+\tau_2\sin^2\iota_2+\tau_3\sin^2\iota_3+\ldots.\}v-\tfrac{1}{4}\sin^2 j\sin 2\upsilon&\\ +\tfrac{1}{2}\sin\iota\sin\iota_1\sin(\vartheta-\vartheta_1)+\tfrac{1}{2}\frac{\tau+\tau_2}{\tau-\tau_2}\sin\iota\sin\iota_2\sin(\vartheta-\vartheta_2)+\tfrac{1}{2}\frac{\tau+\tau_3}{\tau-\tau_3}\sin\iota\sin\iota_3\sin(\vartheta-\vartheta_3)\quad+\ldots.&\\ -\tfrac{1}{2}\sin\iota_1\sin\iota_2\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\quad-\tfrac{1}{2}\sin\iota_1\sin\iota_3\sin(\vartheta_1-\vartheta_3)\quad-\ldots.&\\ +\tfrac{1}{2}\frac{\tau_2+\tau_3}{\tau_2-\tau_3}\sin\iota_2\sin\iota_3\sin(\vartheta_2-\vartheta_3)+\ldots.&\\ +\ldots.&\end{aligned}$$

Es wird auffallen, dass der Faktor von v auf der rechten Seite dieser Gleichung sich von der Einheit um eine kleine Grösse unterscheidet. Dies hat offenbar seinen Grund in der Art und Weise, wie wir v eingeführt haben; es ist nicht schwierig, den Faktor $-\frac{1}{2}\{\tau\sin^2\iota+\ldots.\}$ zum Verschwinden zu bringen, indem man die Bedeutung von v etwas modificirt. Doch will ich hier mich nicht mit dieser Frage beschäftigen, besonders da die betreffende Konstante von verschwindender Kleinheit ist.

Ich fand für Hestia die numerischen Werte:

$$\begin{aligned}42)\quad l = v&-[3.1674-10]v+[6.7918]\sin(\vartheta-\vartheta_1)-[7.1358]\sin(\vartheta-\vartheta_2)\\ &+[6.3285]\sin(\vartheta_1-\vartheta_2)\\ &-\tfrac{1}{4}\sin^2 j\sin 2\upsilon\end{aligned}$$

wo die übrigen Glieder fortgelassen sind, ihrer ausserordentlichen Kleinheit wegen. Die Zahlen in Klammern sind Logarithmen, denen sämmtlich -10 anzuhängen ist.

Auf Grund der in Abh. I und hier gewonnenen Resultate sind wir jetzt

im Stande, die Coordinaten des gestörten Planeten für einen gegebenen Zeitpunkt zu berechnen.

Obwohl ich die Störungen durch Saturn und die übrigen grössten Planeten nur so weit, wie sie die Bewegung Jupiters beeinflussen, und auch die Jupiterstörungen nicht ganz erschöpfend behandelt habe, so ist doch zu erwarten, dass man mit Hülfe der gefundenen Resultate den Planeten nach einem recht beträchtlichen Zeitraum am Himmel ohne jede Schwierigkeit wieder wird auffinden können.

Wenn man dabei bedenkt dass die Störungen, welche Hestia erleidet, sehr beträchtlich sind — wie schon in Abh. I erwähnt, scheint es nur einen Fall*) zu geben, indem man versucht hat, nach der Hansen'schen Methode absolute Störungen von einem derartigen Betrage zu rechnen —, so wird man die Bedeutung der Gyldén'schen Theorie auch von praktischer Seite anerkennen müssen.

Zur Berechnung der Koordinaten des gestörten Planeten wird man mit Vorteil Tafeln entwerfen; auch über diesen Punkt hoffe ich später Mitteilungen machen zu können.

---

*) Untersuchung über die allgemeinen Jupitersstörungen des Planeten Thetis von C. V. L. Charlier. Kgl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bandet 22 No. 2.

Martinus Brendel

de vita sua.

Natus sum, Otto Rudolphus Martinus Brendel, die 12. mens. Aug. a. h. s. 62 in vico Nieder-Schönhausen prope Berolinum sito, patre Ottone, matre Minna e gente Immich, quos parentes morte iamdudum mihi ereptos valde lugeo. Fidei addictus sum evangelicae. Litterarum elementis et domi et in schola, quae vocatur Schaffner'sche Lehr- und Erziehungsanstalt, in vico Gumperda prope Kahlam oppidum Thuringense, imbutus, anno 76 in quartam classem gymnasii Berolinensis, quod appellatur Zum grauen Kloster, receptus sum, quam scholam per septem annos frequentavi.

Maturitatis testimonio instructus, vere anni 83 litterarum universitatem Berolinensem adii, ut auspiciis virorum clarissimorum Förster et Tietjen litteris mathematicis et astronomicis per bis senos menses operam navarem. Deinde per sex menses Monachiae versatus sum, qua in urbe me docuit Seeliger vir doctissimus. Inde Berolinum reversus, per bis senos menses universitatem et scholam illam, quae vocatur Landwirthschaftliche Hochschule, frequentavi, ubi Börnstein vir clarissimus me docuit physicen. Eodem tempore seminarii astronomici sodalis fui.

Mense Augusto a. 85 Stockholmiam me contuli, ut auspiciis Hugonis Gyldén viri clarissimi dilectissimique astronomicis perturbationum studiis me dederem, quae studia ad hunc diem magno cum amore secutus sum; Stockholmiae mansi usque ad mensem Maium a. 88, quod temporis spatium interrupi aestate a. 87, ut Berolini philosophica studia tractarem. Annis 88 et 89 Parisiis Londinique versatus sum imprimis, ut lingua Francogallica et Britannica facilius uti discerem. Huiusce anni mense Maio Berolinum redii ibique in specula regia observationibus et planetarum et cometarum et stellarum duplicum operam dedi, quibus rebus Victor Knorre vir clarissimus me instruxit.

Magistri clarissimi docuerunt me; Berolini: Bastian, Börnstein, Dames, Dilthey, Eichler, Förster, Glan, Hettner, Knorre, Lehmann-Filhés, Netto, Runge, Tietjen, Zeller; Monachiae: von Bezold, Grätz, Penck, Seeliger; Stockholmiae: Gyldén, Sophia de Kovalevski, Mittag-Leffler; Parisiis: Maurice Lévy, Poincaré, Tisserand.

Omnibus his viris atque mulieri doctae gratias ago quam maximas.

Berolini, die 3. mens. Nov. a. 1889.

Thesen.

1. Es wäre wünschenswert, bei den Störungsrechnungen der kleinen Planeten die Gyldén'sche Methode mehr in Anwendung zu bringen.

2. Bei astronomischen Messungen schwierigster Objekte, z. B. sehr enger Doppelsterne, verdient das Wellmann'sche Doppelbildmikrometer den Vorzug vor dem Schraubenmikrometer.

3. Das eingehende Studium einzelner Vorgänge in der Atmosphäre ist ungleich wichtiger als das programmmässige Sammeln von meteorologischen Beobachtungsdaten.

Willy Hartner
1925
Ueberreicht vom Verfasser.

Astronomische Mittheilungen
der
Königlichen Sternwarte zu Göttingen.
Achter Theil.
Herausgegeben von
K. Schwarzschild,
Direktor der Sternwarte.

Theorie des Mondes.

Von

Martin Brendel.

(Aus den Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. Neue Folge. Band III. No. 4.)

Göttingen 1905.
Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei
(W. Fr. Kaestner).

Inhaltsverzeichniss

Seite

Einleitung.

1. Vorbemerkungen 5
2. Besonderheiten der Mondbewegung 7
3. Praktische Störungsrechnung und reine Analysis 8

I. Kapitel. Die Differentialgleichungen der Mondbewegung.

1. Bezeichnungen 10
2. Reduktion auf den Schwerpunkt von Erde und Mond 11
3. Einführung von Polarkoordinaten 12
4. Einführung der Gyldén'schen Koordinaten 13

II. Kapitel. Entwicklung der Störungsfunktion.

1. Entwicklung nach Vielfachen des Winkels H 17
2. Entwicklung nach Potenzen der Gyldén'schen Koordinaten 19
3. Weitere Transformation 21
4. Formeln zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten 24
5. Numerische Berechnung der Koeffizienten 33

III. Kapitel. Einführung der periodischen Lösung nullten Grades.

1. Die Gyldén'schen Koordinaten in der periodischen Lösung 35
2. Formale Beseitigung der Entwicklung der Störungsfunktion nach Potenzen der störenden Masse 36
3. Allgemeines über die Koeffizienten in der periodischen Lösung und über ihre Bestimmung 37

4.—7. Transformationsformeln zur Beseitigung der Entwicklung nach der störenden Masse. 40

IV. Kapitel. Berechnung der periodischen Lösung nullten Grades.

1. Formeln für die Koeffizienten p, q, p', q', t in den Bestimmungsgleichungen 48
2. Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die Funktionen R_0 und S_0 (Störungen des Radiusvektors und der Flächengeschwindigkeit) 49
3. Formeln für die Koeffizienten d, d', d'' etc. 50
4. Formeln für die Koeffizienten r und s 51
5. Die Bestimmungsgleichungen für W_0 (Störungen der Länge in der Bahn) 52
6. Genäherte numerische Berechnung der Koeffizienten a, b, c 52
7. Scharfe numerische Berechnung der Koeffizienten a, b, c 54

Seite

V. Kapitel. Die Glieder ersten Grades.

1. Differentialgleichung für S_1 59
2.—4. Entwicklung der in der Gleichung für S_1 auftretenden periodischen Faktoren . . . 59
5. Differentialgleichung für ϱ_1 61
6.—9. Entwicklung der in der Gleichung für ϱ_1 auftretenden periodischen Faktoren . . . 61
10. Transformirte Differentialgleichungen für S_1 und R_1 62
11. Integralansatz für S_1, R_1, K_1 62
12.—14. Entwicklung der rechten Seiten der Differentialgleichungen für S_1 und R_1 64
15. Die Bestimmungsgleichungen für die a (Funktion S_1) 70
16. Die Bestimmungsgleichungen für die b (Funktion R_1) 73
17. Differentialgleichung für W_1 76
18. Entwicklung der in der Gleichung für W_1 auftretenden periodischen Faktoren . . 77
19. Die Bestimmungsgleichungen für die c (Funktion W_1) 78
20. Die Funktion (ϱ) 80
21. Numerische Werte der Entwicklungs-Koeffizienten $p, q, p', q', t, t', l, r, s$ und der Divisoren 81
22. Auflösung der Bestimmungsgleichungen 83
23. Numerische Werte der Glieder in η 84
24. Numerische Werte der Glieder in η' und für (ϱ) 84

Anhang (Tafeln).

Tafel 1. Formeln für die Koeffizienten $p_{n\cdot 0\cdot 0}, q_{n\cdot 0\cdot 0}$ 86
„ 2. „ „ „ „ „ $q'_{n\cdot 0\cdot 0}$ 87
„ 3. „ „ „ „ „ $p'_{n\cdot 0\cdot 0}$ 87
„ 4 „ „ „ „ „ $t_{n\cdot 0\cdot 0}$ 88
„ 5. „ „ „ „ „ $r_{n\cdot 0\cdot 0}$ 88
„ 6. „ „ „ „ „ $s_{n\cdot 0\cdot 0}$ 88
„ 7. „ „ „ „ „ $p_{n\cdot 1\cdot 0}, q_{n\cdot 1\cdot 0}, p_{n\cdot 0\cdot 1}, q_{n\cdot 0\cdot 1}, p^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}, q^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}, p^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}, q^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}$ 89
„ 8. „ „ „ „ „ $q'_{n\cdot 1\cdot 0}, q'_{n\cdot 0\cdot 1}, q'^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}, q'^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}$ 93
„ 9. „ „ „ „ „ $p'_{n\cdot 1\cdot 0}, p'_{n\cdot 0\cdot 1}, p'^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}, p'^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}$ 94
„ 10. „ „ „ „ „ $t_{n\cdot 1\cdot 0}, t_{n\cdot 0\cdot 1}, t^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}, t^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}$ 96
„ 11. „ „ „ „ „ $t'_{n\cdot 0\cdot 0}$ 97
„ 12. „ „ „ „ „ $l_{n\cdot 0\cdot 0}$ 97

Theorie des Mondes.

Von

Martin Brendel.

Einleitung.

1. Wenn die Vorteile der Gyldén'schen Störungstheorie bisher in der praktischen Störungsrechnung noch nicht so zur Geltung gekommen sind, wie man wohl hätte erwarten sollen, so liegt dies daran, dass die numerische Anwendung bisher nur in beschränktem Maasse stattgefunden hat, und immer nur in solchen Fällen kleiner Planeten, die infolge der Natur ihrer Bahnen besondere Schwierigkeiten bieten; gewiss üben solche schwierigeren Probleme einen grösseren Reiz aus, als die schematische Bearbeitung irgend eines störungstheoretischen Einzelfalls; indessen hat dieser Umstand doch zur Folge, dass Jeder, der nicht selbst ein solches Problem behandelt, dazu geführt wird, die Bedeutung der Gyldén'schen Prinzipien zu unterschätzen, besonders da über die Anwendbarkeit der Gyldén'schen Methoden recht unklare Vorstellungen verbreitet sein dürften.

Wenn ich hier von der Gyldén'schen Störungstheorie spreche, so meine ich diejenigen von Gyldén aufgestellten Prinzipien, die wirklich auch bei der praktischen Störungsrechnung schnell zum Ziele führen, und die ich in der Theorie der kleinen Planeten habe hervortreten lassen; sie sind zum grossen Teil von Gyldén selbst nicht in so ausgesprochener Form aufgestellt worden, da Gyldén seine Hauptarbeiten der Lösung der Frage nach der Stabilität und der Untersuchung der sogenannten absoluten Bahnen gewidmet hat; man findet sie aber teils implizit in seinen Publikationen, teils wurden sie durch mündliche Besprechungen angeregt. Wie ich schon früher oft ausgesprochen habe, erfordert das Problem der drei Körper eine ganz verschiedene Behandlung, je nachdem man die Bewegung eines Planeten während eines beschränkten Zeitraums von einem oder wenigen Jahrhunderten darstellen will, oder ob man untersuchen will, ob seine Bahn während eines wesentlich längeren oder unbeschränkten Zeitraums nur solchen Umwälzungen unterworfen ist, welche unterhalb einer be-

stimmten Grenze bleiben, so dass die Stabilität des Systems gewährleistet ist. Man übersieht sofort, dass gewisse sekulare Wirkungen sich angeben lassen, welche z. B. während eines beschränkten Zeitraums die Bahn nur in ganz geringem Maasse modifiziren, im Laufe der Zeiten aber den Planeten beliebig weit von der Sonne entfernen können.

Die Probleme der praktischen Störungsrechnung sind gegenwärtig überhaupt andere, als die der Analysis, welche sich mit dem Charakter der Lösungen der Differentialgleichungen des Problems beschäftigt. Wenn uns z. B. wirklich ein Himmelskörper ein Beispiel für eine rein periodische, in beliebigen Zeiten nahezu kreisförmig bleibende Bahn bieten würde für den Fall, dass die Newton'sche Gravitation die einzig wirkende Kraft ist, so lassen sich genug Einflüsse nennen, deren Vorhandensein neben der Newton'schen Anziehung sehr wahrscheinlich ist, und die ganz gewiss nach beliebig langer Zeit den Planeten beliebig weit von der Sonne entfernen (oder auch ihn ihr beliebig nähern) würden. —

Die praktischen Schwierigkeiten, welche sich auch bei Anwendung der Gyldén'schen Prinzipien einstellen, und unter denen alle bisher aufgestellten Störungsmethoden leiden, liegen in den Excentricitäten der Bahnen und bei den dem störenden Körper nahe kommenden Planeten auch im Werte des Verhältnisses der beiden grossen Axen, da die Entwicklungen nach den Potenzen dieser Grössen nicht hinreichend stark fallen. Man darf nicht denken, dass diese Schwierigkeit ganz vermieden wird durch die von Hansen (und schon von Gauss bei der Pallas) angewandte Entwicklung der Störungsfunktion, bei der solche Potenzreihen zum Teil fortfallen. So lange man überhaupt nach Anomalien oder Längen entwickelt, erhält man Reihen, die auch im Falle ihrer Konvergenz mit Potenzreihen nach den genannten Grössen zu vergleichen sind, so dass diese viel zu wünschen übrig lässt.

Die Gyldén'sche Störungstheorie bietet aber andere Vorteile, die bei der Mondbewegung noch mehr hervortreten als bei den kleinen Planeten. Denn die schwache Seite unserer Mondtheorien ist eben die Entwicklung nach den Potenzen der Grösse m, welche das Verhältnis der Umlaufszeiten darstellt, oder nach analogen Grössen.

In einer im Sommersemester 1902 gehaltenen Vorlesung habe ich die Grundprinzipien der Gyldén'schen Störungstheorie in ihrer Anwendung auf den Mond vorgetragen und die vorbereitenden Entwicklungen zu einer solchen Anwendung gemacht, wobei ich von den Herren von Brunn und Haskins wesentlich unterstützt worden bin. Diese Entwicklungen und die darauf basirenden Rechnungen sollen im Folgenden gegeben werden; hierbei möchte ich auch noch erwähnen, dass ebenfalls Herr Happel vor einigen Jahren einige der hierher gehörenden Entwicklungen ausgeführt hat, welche aber im folgenden keine Verwendung gefunden haben wegen der veränderten Form des Ganzen. Bei der Ausführung der numerischen Rechnungen und der Lösung der Bestimmungsgleichungen bin ich von Herrn A. Wilkens in weitestem Maasse unterstützt worden.

2. Zuvörderst wollen wir uns die Besonderheiten klarmachen, die das Problem der Mondbewegung gegenüber dem von der Planetenbewegung zeigt; wenn sich auch hierüber nicht viel neues sagen lässt, so wird doch namentlich dem mit der Mondtheorie weniger vertrauten Leser ein solcher Ueberblick willkommen sein: man kann nicht etwa den Mond wie einen kleinen Planeten behandeln, dessen Umlaufszeit zu der des störenden Körpers sich angenähert wie Null zu Eins verhält, oder besser gesagt, für den das Verhältniss $\frac{\textit{Umlaufszeit des gestörten Körpers}}{\textit{Umlaufszeit des störenden Körpers}}$ eine kleine Grösse ist, obwohl die Eigenheiten, die dies Verhältnis mit sich bringt, natürlich auch hier auftreten müssen. In der Mondtheorie spielt der störende Körper überhaupt eine andere Rolle als in der Planetentheorie; denn die Masse der Sonne als störender Körper gegenüber der Erde als Zentralkörper ist so gross, dass trotz ihrer 400 mal grösseren Entfernung ihre Anziehung auf den Mond bedeutend die der Erde überwiegt; es hat dies ja die bekannte Tatsache zur Folge, dass die Bahn des Mondes stets konkav zur Sonne ist. Wir wollen einmal das Verhältniss der Anziehung von Zentral- und störendem Körper im Falle des Mondes mit dem im Falle eines kleinen Planeten vergleichen, und hierzu den Jupiter nächsten Planeten Thule heranziehen. Die grösste Entfernung Thules von der Sonne kann nach den Elementen betragen 4,613 und die kleinste Entfernung Jupiters von der Sonne ist 4,963; also die grösste Annäherung Thules an Jupiter beträgt ungefähr 0,350; unter Annahme des Massenverhältnisses $\frac{\textit{Jupiter}}{\textit{Sonne}} = \frac{1}{1067}$ erhalten wir also den Maximalwert des Anziehungsverhältnisses von störendem und Zentralkörper = 0,166. Die Jupiteranziehung kann also bis auf $\frac{1}{6}$ der Sonnenanziehung anwachsen, wodurch schon recht erhebliche Schwierigkeiten für die Berechnung der Bewegung Thules entstehen.

Beim Monde liegen die Verhältnisse ganz anders; das Massenverhältniss von störendem und Zentralkörper ist hier etwa 360 000 und der störende Körper ist 400 mal so weit entfernt als der Zentralkörper; das Verhältniss der Anziehungen wird hier $\frac{9}{4}$; d. h. die Sonne wirkt mit mehr als der doppelten Kraft auf den Mond als die Erde. Infolgedessen sieht man auch in der Tat nicht die gesammte Anziehung, die die Sonne auf den Mond ausübt, als störende Kraft an, sondern nur die Differenz der Sonnenanziehung auf Erde und Mond. — Man erhält bei der Planetenbewegung die ungestörte Bewegung als Grenzfall, wenn man die Masse des störenden Körpers verschwinden lässt; dagegen erhält man beim Monde die ungestörte Bewegung, wenn man die Anziehung der Sonne auf Erde und Mond die gleiche werden, also nur die Differenz beider verschwinden lässt oder, mit anderen Worten, indem man die Sonne auf den Schwerpunkt von Erde und Mond wirken lässt.

Hierzu kommt noch eine Besonderheit des Mondproblems, nämlich die, dass die Masse des gestörten Körpers nicht sehr klein ist gegen die des Zentralkörpers, sondern etwa $\frac{1}{80}$ desselben beträgt; der Zentralkörper wird also selbst

auch zum gestörten, denn alle Störungen der Mondbewegung spiegeln sich, auf $\frac{1}{80}$ verkleinert, in der Erdbewegung wieder. Die Bewegung des störenden Körpers (der Sonne) um den Zentralkörper (die Erde) ist darum von vornherein unbekannt, da sie die Störungen des Mondes enthält. Man trägt gewöhnlich diesem Umstand Rechnung, indem man die Koordinaten der Sonne auf den Schwerpunkt von Erde und Mond bezieht; indem man aber die Mondkoordinaten auf den Erdmittelpunkt bezieht, muss man in der Entwicklung der Störungsfunktion gewisse Faktoren zur Reduktion der beiden Koordinatensysteme auf einander einführen; erst Herr Harzer hat die allgemeine Form dieser Faktoren gegeben. Es hat mir zweckmässiger geschienen, das ganze Problem der Mondbewegung auf diesen Schwerpunkt zu beziehen; dadurch vereinfachen sich die Entwicklungen in hohem Maasse und hat man einmal die Mondkoordinaten mit Bezug auf ihn, so braucht man nur den Radiusvektor mit $\frac{81}{80}$ zu multipliziren um die Reduktion auf den Erdmittelpunkt auszuführen.

3. Wenn ich oben gesagt habe, dass die Probleme der praktischen Störungsrechnung andere sind, als die der reinen Analysis, so soll das nicht heissen, dass alle Beziehungen zwischen beiden abzubrechen seien; vielmehr ist es einleuchtend, dass die erstere sich nur dann gedeihlich entwickeln und Resultate von wirklichem Werte zeitigen kann, wenn sie sich auf die Erfolge stützt, die die Analysis errungen hat. Da diese Erfolge aber bis jetzt noch recht spärlich sind, so ist der Störungstheoretiker gezwungen, sich auf Gebieten zu bewegen, auf denen die Analysis noch keine festen Stützpunkte geschaffen hat. Es scheint mir daher ausser Zweifel, dass hier, wie in vielen anderen Fragen, die Analysis nicht der Praxis vorangehen kann, sondern gerade das Umgekehrte stattzufinden hat. Ueberhaupt müssen ja die naturwissenschaftlichen Begriffe und Erscheinungen, welche mit Hilfe der Analysis untersucht werden sollen, erst rein empirisch durch Anschauung gewonnen werden; die Beobachtung und das Experiment muss vorangehen und die Probleme erst schaffen, an denen die Analysis ihre Kräfte erproben soll; dies gilt selbst in vielen Zweigen der reinen Mathematik.

Ich möchte nun dem Beobachtungsexperiment das numerische an die Seite stellen; mit dem Drei-Körper-Problem können wir nicht physisch experimentiren; wenn wir es könnten, so wäre die Arbeit der Analysis wesentlich erleichtert; sie würde durch die Anschauung manchen Wegweiser erhalten. Hier bleibt also nur das numerische Experiment, und dieses hat seit alten Zeiten auch die Mechanik des Himmels beherrscht. Heutzutage ist hierin eine Wendung eingetreten; während Gyldén die Methoden der Himmelsmechanik zu einer bisher unerreichten Vollkommenheit ausgebildet und die grossen Schwierigkeiten, welche in gewissen Fällen eintreten, mit grösstem Geschick überwunden hat, hat Herr Poincaré in streng analytischem Sinn das Terrain untersucht und Resultate zu Tage gefördert, die wir im strengen Sinn der Mathematik unser eigen nennen können. Es bleibt aber insofern noch viel zu tun übrig, als es gilt, die Brücke zwischen den Untersuchungen dieser beiden grossen Gelehrten zu schlagen, und

das von Herrn Poincaré geschaffene feste Terrain so zu erweitern, dass die Gyldén'sche Störungstheorie darauf fest begründet werden kann. So bedeutend diese Wendung also an sich ist, so ist die Auffassung, dass nun das Experiment überhaupt aufhöre, jedenfalls verfrüht.

Gyldén hat zu verschiedenen Malen geäussert, dass man darauf hinstreben müsste, eine Anschauung zu gewinnen von den Bewegungen im Drei-Körper-Problem, um so die analytischen Hilfsmittel zu seiner Lösung zu entdecken, und solche Anschauung gewinnt man eben durch das Experiment, zunächst durch das physische und wo dieses nicht möglich ist, durch das numerische. Das glänzendste Beispiel einer solchen Entwicklung bieten uns die Arbeiten von Gauss, der in seinen Aufzeichnungen beim Auffinden eines wichtigen Resultats mehrfach angibt, dass er es „per inductionem“ gefunden habe. Auch müssen hier die Untersuchungen des Herrn Darwin „on periodic orbits“ erwähnt werden.

Wenn ich nun den Plan fasste, an die Entwicklung einer Mondtheorie heranzugehen mit Benutzung der Resultate der Gyldén'schen Störungstheorie, so konnte ich vorläufig nicht ganz auf das verzichten, was ich oben als numerisches Experiment bezeichnet habe, und namentlich muss ich den Inhalt der vorliegenden Arbeit im wesentlichen als ein solches bezeichnen, und zwar deswegen, weil ich zunächst nicht angeben kann, innerhalb welcher Grenze die numerischen Resultate zuverlässig sein müssen oder mit anderen Worten, weil ich keine obere Grenze für die Restglieder der angewandten Reihen angeben kann. Wohl habe ich diesem Punkte einige Aufmerksamkeit geschenkt; ich möchte aber vermeiden, in dieser Arbeit einige noch unvollständige Resultate anzuführen. Wenn ich von Restgliedern spreche, so darf nicht vergessen werden, dass ich eine Lösung des Problems für einen beschränkten, wenn auch ausserordentlich langen, Zeitraum suche, wobei also die Restglieder Funktionen der Zeit sind, auf welche die Rechnung ausgedehnt werden soll.

Die Methoden, welche in der vorliegenden Arbeit enthalten sind, dürften kaum über diejenigen hinausgehen, die bereits die Herren G. W. Hill und E. Brown angewandt haben, und die numerische Ausführung des Herrn Brown ist dem Abschluss ganz erheblich näher geführt, als die meinige, die erst vor kurzem begonnen ist. Die vorliegende Arbeit wird indessen nicht als überflüssig bezeichnet werden können, weil schon die benutzten Koordinaten andere sind und dadurch eine gewisse Kontrolle geschaffen wird, und weil ihre Fortsetzung, über die ich später Mitteilung zu machen hoffe, wesentliche Erweiterungen bringen soll.

Für die Freundlichkeit, mit welcher Herr Schwarzschild diese Arbeit unter die Mitteilungen der Göttinger Sternwarte aufgenommen hat, möchte ich nicht unterlassen, an dieser Stelle ihm herzlich zu danken.

---

1. Kapitel.

Die Differentialgleichungen der Mondbewegung.

1. Es mögen bedeuten:

x, y, z, r die Koordinaten des Mondes, bezogen auf den Erdmittelpunkt als Anfangspunkt und auf drei Axen von unveränderlicher Richtung,

x', y', z', r' die Koordinaten der Sonne, bezogen auf dasselbe System,

Δ die Entfernung des Mondes von der Sonne,

m_0 die Masse der Erde,

m' die Masse der Sonne,

m die Masse des Mondes;

die letztern sollen sich in absoluten Einheiten verstehen, so dass als Masseneinheit diejenige Masse gedacht ist, die einer ihr gleichen Masse in der Entfernung Eins die Beschleunigung Eins erteilt. Die Dimension der Masse ist also $(\text{Länge})^3 \times (\text{Zeit})^{-2}$; wählte man als Einheit Centimeter und Sekunde, so erhielte man sie durch die eigentlichen Gauss'schen Einheiten ausgedrückt. Es liegt auf der Hand, dass wir die Erdbahnhalbaxe als Längeneinheit und den mittleren Tag als Zeiteinheit annehmen; erstere, da die Massen der Himmelskörper sich zunächst nur durch diese Einheit messen lassen und die Relation zwischen Centimeter und Erdbahnhalbaxe (also die Sonnenparallaxe) zu ungenau bekannt ist; letztere, um nicht zu unhandlich grosse Zahlen zu erhalten. Ich erwähne dies, obwohl es selbstverständlich ist, weil die Beziehung der Massen der Himmelskörper zu dem, was die Physiker als Masseneinheit definiren, nicht immer richtig aufgefasst worden ist, und um zu zeigen, dass das Mitführen des häufig mit f bezeichneten Proportionalitätsfaktors in den Gleichungen der Himmelsmechanik vollkommen überflüssig ist. Der Astronom hat mit dem Gramm als Masseneinheit garnichts zu tun. Die numerischen Werte der Massen der drei Himmelskörper, welche wir nach Newcomb unsern Rechnungen zu Grunde legen wollen, setze ich hierunter; wobei die Zahlen in Klammern Logarithmen sind*):

*) Der zuerst angegebne Wert der Sonnenmasse ist gleich dem Quadrat der Gauss'schen Konstante k, die wohl häufig auch als Gravitationskonstante bezeichnet wird; eine Bezeichnung, auf die die Astronomen zu verzichten sich wohl gewöhnen müssen, da die Physiker mit „Gravitationskonstante" jetzt etwas ganz anderes bezeichnen: nämlich den reciproken Wert der Masse eines Gramms, ausgedrückt in Gauss'schen Einheiten; die Zweckmässigkeit dieser letzteren Bezeichnungsweise scheint mir sehr zweifelhaft, da sie nur einen Faktor darstellt, der die Beziehung zwischen dem Gramm und den Gauss'schen Einheiten für Raum und Zeit angibt.

	in astronomischen Einheiten (Erdbahnhalbaxe, mittlerer Tag)	in Gauss'schen Einheiten, Centimeter, Sekunde (genähert)	in Einheiten der Erdmasse
Sonnenmasse	[6.4711629—10]	[26.122]	333434
Erdmasse	[0.9481529—10]	[20.599]	1
Mondmasse	[9.03726—20]	[18.688]	$\frac{1}{81{,}45}$

2. Die Differentialgleichungen der Mondkoordinaten sind hiernach die folgenden:

$$1)\qquad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0+m}{r^3}x &= -\frac{m'}{r'^3}x' - \frac{m'}{\Delta^3}(x-x') \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{m_0+m}{r^3}y &= -\frac{m'}{r'^3}y' - \frac{m'}{\Delta^3}(y-y') \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{m_0+m}{r^3}z &= -\frac{m'}{r'^3}z' - \frac{m'}{\Delta^3}(z-z'). \end{aligned}$$

Wir wollen diese Gleichungen auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond transformiren, da in vorstehender Form, wie schon bemerkt, die Mondstörungen in den Koordinaten x', y', z', r' implicit vorhanden sind. Eine teilweise Transformation auf diesen Schwerpunkt, bei welcher die Sonnenkoordinaten auf diesen, die Mondkoordinaten dagegen auf den Erdmittelpunkt bezogen werden, ist früher häufig angewandt und von Herrn Harzer in genereller Weise entwickelt worden; wir wollen alle Koordinaten auf den ersteren beziehen.

Bezeichnen wir das Massenverhältniss von Erde und Mond

$$\frac{m}{m_0} = m,$$

wo also $m = \frac{1}{81{,}45}$, und nennen wir ξ, η, ζ, r_1, ξ', η', ζ' die Koordinaten von Mond und Sonne in Bezug auf den genannten Schwerpunkt, so ist nach dem Schwerpunktsgesetz:

$$2)\qquad \begin{aligned} x &= (1+m)\xi & x' &= \xi' + m\xi \\ y &= (1+m)\eta & y' &= \eta' + m\eta \\ z &= (1+m)\zeta & z' &= \zeta' + m\xi, \\ r &= (1+m)r_1 \end{aligned}$$

und also:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{m_0+m}{(1+m)^3}\frac{\xi}{r_1^3} = -\frac{m'}{1+m}\frac{\xi'+m\xi}{r'^3} + \frac{m'}{1+m}\frac{\xi'-\xi}{\Delta^3}$$

und analog für η und ζ, wo

$$3) \qquad \begin{aligned} \Delta^2 &= (\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2 \\ r'^2 &= (\xi' + m\xi)^2 + (\eta' + m\eta)^2 + (\zeta' + m\zeta)^2. \end{aligned}$$

Bezeichnet man

$$4) \qquad \begin{aligned} M &= \frac{\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}}{(1+m)^3}, \quad m' = \frac{\mathfrak{m}'}{M} \\ \Omega &= \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{mr'}\right), \end{aligned}$$

so wird

$$5) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{M\xi}{r_1^3} &= M\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{M\eta}{r_1^3} &= M\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{M\zeta}{r_1^3} &= M\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}, \end{aligned}$$

wo bei der partiellen Differentiation von Ω die Ausdrücke 3) zu benutzen sind. Die letzten Gleichungen haben ganz dieselbe Form, die ich in der Theorie der kleinen Planeten*) benutzt habe und können nun genau wie dort weiter behandelt werden.

3. Die Gleichungen 5) transformiren wir demnach, wie in kl. Pl. I. Seite 23—26, und auf ein Koordinatensystem mit dem gleichen Anfangspunkt, also mit den Axen $\xi_1\eta_1\zeta_1$ von veränderlichen Richtungen, die so bestimmt werden, dass die $\xi_1\eta_1$-Ebene beständig mit der oskulirenden Bahnebene sowohl des Mondes als der Erde um ihren gemeinsamen Schwerpunkt zusammenfällt. Wir setzen also (kl. Pl. I. Seite 23) allgemein

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha\,\xi_1 + \beta\,\eta_1 + \gamma\,\zeta_1 & \xi_1 &= \alpha\xi + \alpha_1\eta + \alpha_2\zeta \\ \eta &= \alpha_1\xi_1 + \beta_1\eta_1 + \gamma_1\zeta_1 & \eta_1 &= \beta\xi + \beta_1\eta + \beta_2\zeta \\ \zeta &= \alpha_2\xi_1 + \beta_2\eta_1 + \gamma_2\zeta_1 & \zeta_1 &= \gamma\xi + \gamma_1\eta + \gamma_2\zeta \end{aligned}$$

und lassen die Mondkoordinaten die Bedingungen:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma\xi + \gamma_1\eta + \gamma_2\zeta = 0 \\ \frac{d\zeta_1}{dt} &= \gamma\frac{d\xi}{dt} + \gamma_1\frac{d\eta}{dt} + \gamma_2\frac{d\zeta}{dt} = 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Auch die Lage der ξ_1-Axe in der $\xi_1\eta_1$-Ebene definiren wir (kl. Pl. I. Seite 24) durch die Relation

*) Abhandlungen der K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, Neue Folge 1. 2. — Diese Abhandlung werde ich im Folgenden stets unter der Abkürzung „kl. Pl. I“ citiren.

$$\beta \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha \frac{d\beta}{dt} + \alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\alpha_2}{dt} = 0,$$

wonach wir für die Bewegung in der oskulirenden Bahnebene die folgenden Gleichungen erhalten:

6)
$$\frac{d^2\xi_1}{dt^2} + \frac{M\xi_1}{r_1^3} = M\frac{\partial\Omega}{\partial\xi_1}$$
$$\frac{d^2\eta_1}{dt^2} + \frac{M\eta_1}{r_1^3} = M\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1}.$$

Führen wir Polarkoordinaten ein durch die Relationen

7)
$$\xi_1 = r_1 \cos v \qquad \eta_1 = r_1 \sin v,$$

wo v der Winkel zwischen dem Radiusvektor und der positiven ξ_1-Axe, also die wahre Länge des Mondes in seiner oskulirenden Bahnebene, ist, so wird (kl. Pl. I. Seite 26—27)

8)
$$\frac{d}{dt}\left(r_1^2 \frac{dv}{dt}\right) = M\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$
$$r_1 \frac{d^2 r_1}{dt^2} - r_1^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r_1} = M r_1 \frac{\partial\Omega}{\partial r_1},$$

wobei in dem Differentialquotienten $\frac{\partial\Omega}{\partial v}$ die Länge v soweit als variabel anzusehen ist, als sie durch die Koordinaten in der oskulirenden Bahnebene eingeführt wird, also nicht, soweit sie in den Grössen auftritt, welche die Lage dieser Bahnebene gegen eine feste Fundamentalebene definiren (vgl. kl. Pl. I. S. 27).

4. Wir wollen weiter die Gyldén'schen Koordinaten S, ϱ und W in unsere Differentialgleichungen 8) als abhängige Veränderliche und die Länge v als unabhängige Veränderliche einführen. Diese Gyldén'schen Koordinaten S und ϱ definire ich (kl. Pl. I. S. 16 u. 28), wie folgt:

9)
$$r_1 = \frac{a_1(1-\eta^2)}{1+\varrho} \qquad r_1^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{M a_1 (1-\eta^2)}}{1+S}.$$

Indem a_1 eine Konstante bedeutet, die schlechthin als Halbaxe der Mondbahn um den Schwerpunkt des Systems Erde + Mond (aber ohne geometrische Interpretation) bezeichnet werden kann, sehen wir, dass ϱ die Schwankungen des Radiusvektor und S die der Flächengeschwindigkeit um ihre gegenwärtigen Mittelwerte charakterisirt; die erstere Grösse ist also von der Ordnung der Excentricität der Mondbahn, die letztere von der Ordnung der Störungen. Die Funktion η, welche nur Veränderungen sekularer Art unterworfen und ebenfalls von der Ordnung der Excentricität ist, werden wir gleich ebenso definiren, wie in kl. Pl.; übrigens ist ihr Wert von der Excentricität der oskulirenden Ellipse nicht sehr verschieden.

Die Einführung der Variabeln ϱ, S und v in die Gleichungen 8) verwandelt diese in die folgenden (kl. Pl. I. S. 28—29):

$$-\frac{1}{1+S}\frac{dS}{dv} = (1+S)^2 Q + \tfrac{1}{2}\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}$$

$$10)\qquad \frac{d^2\varrho}{dv^2}+\varrho = -\left\{\frac{2}{1-\eta^2}\frac{d\eta^2}{dv}+(1+S)^2 Q\right\}\frac{d\varrho}{dv}+2S+S^2-(1+S)^2 P$$
$$-\left\{\frac{1}{1-\eta^2}\frac{d^2\eta^2}{dv^2}+\frac{2}{(1-\eta^2)^2}\left(\frac{d\eta^2}{dv}\right)^2+\frac{(1+S)^2}{1-\eta^2}Q\frac{d\eta^2}{dv}\right\}(1+\varrho),$$

wo

$$11)\qquad Q = \frac{r_1^2}{a_1(1-\eta^2)}\frac{\partial\Omega}{\partial v}, \qquad P = r_1^2\frac{\partial\Omega}{\partial r_1}.$$

Ueber die Funktion ϱ seien folgende Bemerkungen gemacht, welche in kl. Pl I. Seite 18—21 näher begründet sind. Wir setzen

$$12)\qquad \varrho = (\varrho)+R,$$

wo R denjenigen Teil der Funktion ϱ bezeichnet, der mit der störenden Masse verschwindet, während (ϱ) den sogenannten elementaren Teil bildet, welcher von der Ordnung der Excentricität ist und mit verschwindender störender Masse in das Glied der elliptischen Bewegung $e\cos(v-\pi)$ übergeht. (ϱ) enthält im Grossen und Ganzen die sogenannten sekularen Störungen der Excentricität und der Länge des Perihels, welche in den klassischen Theorien auftreten. Wir setzen auch

$$13)\qquad (\varrho) = \eta\cos \mathrm{v}, \qquad \mathrm{v} = v-\Pi,$$

wo η und Π mit einer gewissen Annäherung die Excentricität und die Perihellänge mit ihren sekularen Aenderungen darstellen, sich also mit der Zeit (oder richtiger mit v) nur langsam ändern. Wir werden η und Π in der Form erhalten

$$14)\qquad \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi = \varkappa \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \omega + \varkappa_1 \alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \omega_1$$
$$\omega = \varsigma v + \Gamma, \quad \omega_1 = \varsigma_1 v + \Gamma_1,$$

wo $\varkappa$, $\varkappa_1$, α, ς, ς_1, Γ, Γ_1 Konstanten und zwar $\varkappa$ und Γ die beiden Integrationskonstanten der Differentialgleichung 10) für ϱ sind. ς_1 hängt von der Sekularbewegung des Perihels der Erdbahn ab, $\varkappa_1$ von ihrer Excentricität und Γ_1 von ihrer Perihellänge, während α das Verhältniss der Halbaxen der Bahnen von Mond und Sonne, also eine sehr kleine Grösse ist. Das Glied in $\varkappa_1$ ist also ein „parallaktisches". Sieht man die Bahn der Erde (oder vielmehr die Bahn des Schwerpunkts von Erde und Mond) um die Sonne als feste Ellipse an, so verschwindet ς_1; sieht man sie als Kreisbahn an, so verschwindet auch $\varkappa_1$.

ς ist die Apsidenbewegung des Mondes in der Gyldén'schen Definition. Man hat auch

15) $$(\varrho) = \varkappa \cos(v-\omega) + \varkappa_1 \alpha \cos(v-\omega_1).$$

Zu den Gleichungen 10) müssen wir noch die zweite der Gleichungen 9) hinzufügen, um die Relation zwischen v und der Zeit zu erhalten; setzt man für r_1 seinen Wert und bezeichnet man

16) $$n = \frac{\sqrt{M}}{a_1^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{also auch} \quad n = \frac{\sqrt{m_0+m}}{a^{\frac{3}{2}}},$$

wenn $a = a_1(1+m)$ die Halbaxe der Mondbahn um den Erdmittelpunkt bedeutet, so schreibt sich die erwähnte Gleichung nach Einführung von v als unabhängiger Veränderlicher:

17) $$n\frac{dt}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\varrho)^2}(1+S),$$

welche also ausser den Gleichungen 10) noch zu integriren ist. Wir benutzen sie indessen nicht in der vorstehenden Form, sondern stellen die Störungen der Länge, wie folgt, dar. Sei

18) $$L = nt + \Lambda,$$

wo n die Bewegungskonstante (oder mittlere Bewegung) und Λ den Wert von L zur Zeit $t = 0$ bezeichnet; n und Λ sind reine Konstanten; wir können L die (ungestörte) mittlere Länge nennen; dann setzen wir

19) $$v = L - \sum B_n \sin n\mathrm{v} - W,$$

wo $\sum B_n \sin n\mathrm{v}$ die Mittelpunktsgleichung und zwar bereits mit Berücksichtigung der sogenannten sekularen Störungen ist, indem die B_n hier Funktionen von η, wie sie in der elliptischen Bewegung von e sind; v kann mit der wahren Anomalie verglichen werden. Es ist (kl. Pl. I. S. 31)

$$B_1 = -2\eta \qquad B_4 = \tfrac{5}{3}\tfrac{5}{2}\eta^4 + \cdots$$
$$B_2 = \tfrac{3}{4}\eta^2 + \tfrac{1}{8}\eta^4 + \cdots \qquad B_5 = -\tfrac{3}{4}\tfrac{3}{0}\eta^5 - \cdots$$
$$B_3 = -\tfrac{1}{3}\eta^3 - \tfrac{1}{8}\eta^5 - \cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Funktion W bedeutet also die eigentlichen Störungen der Länge und bestimmt sich aus der Differentialgleichung (kl. Pl. I. S. 32—33):

20) $$\frac{dW}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos\mathrm{v})^2}\left\{\frac{1+S}{\left(1+\frac{R}{1+\eta\cos\mathrm{v}}\right)^2} - 1\right\} - \frac{d\Xi}{dv},$$

wo

$$21) \qquad \frac{d\Xi}{dv} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D(B_n \sin n\mathrm{v})}{Dv};$$

das Zeichen D bedeutet hier, dass die Differentiation nur in Bezug auf η und Π auszuführen ist, also das explicite v im Argument $\mathrm{v} = v - \Pi$ als konstant anzusehen ist. Ξ ist also eine kleine Grösse, wenn auch hier beträchtlich grösser als im Falle der kleinen Planeten.

Um eine Relation zu haben, welche es ermöglicht, die Länge v aus der Zeit t zu berechnen, nachdem die Funktionen η, Π und W bekannt sind, dienen die Gleichungen (kl. Pl. I. S. 30 u. 34):

$$22) \qquad \begin{aligned} M &= L - \Pi - W \\ \varepsilon - \eta \sin \varepsilon &= M \\ \operatorname{tg} \frac{\mathrm{v}}{2} &= \sqrt{\frac{1+\eta}{1-\eta}} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \\ v &= \mathrm{v} + \Pi, \end{aligned}$$

in denen M als die mittlere und ε als die excentrische Anomalie bezeichnet werden können.

II. Kapitel.

Entwicklung der Störungsfunktion.

1. Wir haben nun die Störungsfunktion Ω zu entwickeln und die Ausdrücke ihrer partiellen Ableitungen Q und P herzuleiten, welche in den Gleichungen 10) vorkommen. Wir benutzen dazu eine der Gyldén'schen analoge Methode unter enger Anlehnung an kl. Pl., wobei allerdings einige Modifikationen nötig werden wegen der veränderten Form der Störungsfunktion. Diese hat die Form:

$$4) \qquad \Omega = \frac{m'}{1+m}\left(\frac{1}{\Delta} + \frac{1}{mr'}\right),$$

wo Δ und r' in rechtwinkligen Koordinaten durch die Gleichungen 3) gegeben sind. Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Radiusvektor des Mondes r_1 und dem der Sonne r_1', beide vom Schwerpunkt des Systems Erde + Mond gerechnet, mit H, so ist $\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta' = r_1 r_1' \cos H$, und es wird

$$23) \qquad \begin{aligned} \Delta^2 &= r_1'^2 + r_1^2 - 2r_1' r_1 \cos H \\ r'^2 &= r_1'^2 + m^2 r_1^2 + 2m r_1' r_1 \cos H. \end{aligned}$$

Die Lage der oskulirenden Bahnebene zur festen Fundamentalebene, als welche man die Ekliptik zu irgend einer Zeit wählen wird, definiren wir ebenso wie in kl. Pl. Kapitel III. Da in der vorliegenden Abhandlung auf die Breitenstörungen des Mondes nicht eingegangen werden soll, so genügt es, mit Hinweis auf den Anfang des IV. Kapitel der kl. Pl. zu erinnern, dass der Winkel H sich wie folgt ausdrücken lässt:

$$\begin{aligned} \cos H &= \cos H_1 + h \\ H_1 &= v - v' + \mathrm{H} - \mathrm{H}', \end{aligned}$$

wo h, H, H' das Quadrat der Neigung enthalten und v' die wahre Länge der Sonne bedeutet. Die Breite der Sonne, also auch H', ist hier stets eine sehr kleine Grösse; dagegen wird H ein nicht ganz unbeträchtliches sekulares Glied (vgl. kl. Pl. S. 42) enthalten wegen der schnellen Bewegung der Knoten der Mondbahn. Mit Vernachlässigung des Quadrats der Neigung hätte man $H = v - v'$.

Wir setzen nun in ähnlicher Weise wie kl. Pl. S. 47:

$$
\begin{aligned}
(\Delta)^2 &= r_1'^2 + r_1^2 - 2r_1' r_1 \cos H_1 \\
(r')^2 &= r_1'^2 + m^2 r_1^2 + 2mr_1' r_1 \cos H_1 \\
(\Omega) &= \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{(\Delta)} + \frac{1}{m(r')}\right\}
\end{aligned}
\tag{24}
$$

und entwickeln nach Cosinus der Vielfachen von H_1:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_1}{(\Delta)} &= M_0 + 2M_1 \cos H_1 + 2M_2 \cos 2H_1 + \cdots \\
\frac{a_1}{m(r')} &= N_0 + 2N_1 \cos H_1 + 2N_2 \cos 2H_1 + \cdots \\
a_1(\Omega) &= R_0 + 2R_1 \cos H_1 + 2R_2 \cos 2H_1 + \cdots
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Wir haben dann:

$$
M_n = \frac{1}{\pi}\frac{a_1}{r_1'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+\left(\frac{r_1}{r_1'}\right)^2 - 2\frac{r_1}{r_1'}\cos\psi}}
$$

$$
\begin{aligned}
N_n &= \frac{1}{\pi}\frac{a_1}{mr_1'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+\left(\frac{mr_1}{r_1'}\right)^2 + 2\frac{mr_1}{r_1'}\cos\psi}} \\
&= \frac{(-1)^n}{\pi}\frac{a_1}{mr_1'}\int_0^\pi \frac{\cos n\psi\, d\psi}{\sqrt{1+\left(\frac{mr_1}{r_1'}\right)^2 - 2\frac{mr_1}{r_1'}\cos\psi}}
\end{aligned}
$$

$$
R_n = \frac{m'}{1+m}(M_n + N_n);
$$

setzt man:

$$
k = \frac{r_1}{r_1'}, \quad k_1 = mk,
$$

so wird nach der kl. Pl. S. 48—49 angegebenen Transformation

$$
M_n = \frac{2}{\pi}\frac{a_1}{r_1'}k^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}
$$

$$
N_n = (-1)^n \frac{2}{\pi}\frac{a_1}{mr_1'}k_1^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2\sin^2\varphi}}.
$$

Für den störenden Körper haben wir

$$
r_1' = \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\varrho'},
$$

und wenn wir bezeichnen

$$k = \alpha\sqrt{1-\lambda}, \quad \alpha = \frac{a_1}{a'},$$

so ist

$$\lambda = 1-\left(\frac{a'}{r_1'}\right)^2\left(\frac{r_1}{a_1}\right)^2.$$

Hiermit ergibt sich

$$M_n = \frac{2}{\pi}\frac{a'}{r_1'}\alpha^{n+1}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}$$

$$N_n = (-1)^n\frac{2}{\pi}\frac{a'}{r_1'}m^{n-1}\alpha^{n+1}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-m^2\alpha^2(1-\lambda)\sin^2\varphi}}$$

oder, wenn wir nach Potenzen von λ entwickeln, und

$$\beta_n^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}, \qquad \beta_n'^{(s)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{(1-m^2\alpha^2\sin^2\varphi)^{\frac{s}{2}}}$$

26)

$$C_{n\cdot 0} = \alpha^{n+1}\beta_n^{(1)} \qquad C'_{n\cdot 0} = m^{n-1}\alpha^{n+1}\beta_n'^{(1)}$$

$$C_{n\cdot 1} = \tfrac{1}{2}\alpha^{n+3}\beta_{n+1}^{(3)} \qquad C'_{n\cdot 1} = \tfrac{1}{2}m^{n+1}\alpha^{n+3}\beta_{n+1}'^{(3)}$$

$$C_{n\cdot 2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\alpha^{n+5}\beta_{n+2}^{(5)} \qquad C'_{n\cdot 2} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}m^{n+2}\alpha^{n+5}\beta_{n+2}'^{(5)}$$

etc. etc.

$$\gamma_{n\cdot\sigma} = \frac{m'}{1+m}(C_{n\cdot\sigma}+(-1)^n C'_{n\cdot\sigma})$$

bezeichnen:

$$R_n = \frac{a'}{r_1'}(1-\lambda)^{\frac{n}{2}}\{\gamma_{n\cdot 0}-\gamma_{n\cdot 1}\lambda+\gamma_{n\cdot 2}\lambda^2-+\cdots\},$$

d. h. wir erhalten eine ganz analoge Entwicklung wie für die Funktion (Ω) kl. Pl. S. 50.

2. Führen wir für λ seinen Wert

$$\lambda = 1-\left(\frac{1-\eta^2}{1+\varrho}\right)^2\left(\frac{1+\varrho'}{1-\eta'^2}\right)^2$$

ein und entwickeln wir nach Potenzen der Grössen ϱ, ϱ', η^2, η'^2, so wird

27)

$$a_1(\Omega) = 2\sum{}' \Omega_{(n.s.s')\nu.\nu'}\varrho^\nu\varrho'^{\nu'}\eta^{2\nu}\eta'^{2\nu'}\cos nH_1$$

ganz analog der Gleichung 121) kl. Pl. Es gelten also für die Koeffizienten $\mathfrak{Q}_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}}$ die kl. Pl. unter 122) gegebenen Ausdrücke, von denen ich hier nur die ersten hinschreibe:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_{n\cdot 0\cdot 0} &= \gamma_{n\cdot 0} \\
28) \qquad \mathfrak{Q}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -n\gamma_{n\cdot 0} - 2\gamma_{n\cdot 1} \\
\mathfrak{Q}_{n\cdot 0\cdot 1} &= (n+1)\gamma_{n\cdot 0} + 2\gamma_{n\cdot 1} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Es ist nur zu bemerken, dass diese Gleichungen so gelten, wie sie hier stehen, auf der rechten Seite also nicht der Faktor $\frac{m'}{1+m}$ zuzufügen ist, da dieser bereits im Ausdruck 26) für $\gamma_{n\cdot 0}$ aufgenommen ist.

Für unsere Mondtheorie werden indessen einige höhere $\mathfrak{Q}$-Koeffizienten erforderlich, die in kl. Pl. nicht gegeben sind; man kann diese entweder durch successive Entwicklung (kl. Pl. S. 51) herleiten oder aus den generellen Entwicklungen Gyldéns[1]) entnehmen; ich setze sie hierher:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{Q}_{n\cdot 4\cdot 0} &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\gamma_{n\cdot 0} + \frac{2n^3+15n^2+37n+30}{6}\gamma_{n\cdot 1} \\
&\quad + (2n^2+14n+25)\gamma_{n\cdot 2} + (8n+36)\gamma_{n\cdot 3} + 16\gamma_{n\cdot 4}, \\
\mathfrak{Q}_{n\cdot 3\cdot 1} &= -\frac{n(n+1)^2(n+2)}{1.2.3}\gamma_{n\cdot 0} - \frac{4n^3+24n^2+50n+36}{3}\gamma_{n\cdot 1} \\
&\quad - (8n^2+48n+76)\gamma_{n\cdot 2} - (32n+128)\gamma_{n\cdot 3} - 64\gamma_{n\cdot 4}, \\
29) \qquad \mathfrak{Q}_{n\cdot 5\cdot 0} &= -\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}\gamma_{n\cdot 0} - \frac{n^4+12n^3+53n^2+102n+72}{12}\gamma_{n\cdot 1} \\
&\quad - \frac{2n^3+24n^2+97n+132}{3}\gamma_{n\cdot 2} - 2(2n^2+20n+51)\gamma_{n\cdot 3} - 16(n+6)\gamma_{n\cdot 4} - 32\gamma_{n\cdot 5}, \\
\mathfrak{Q}_{n\cdot 4\cdot 1} &= \frac{n(n+1)^2(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\gamma_{n\cdot 0} + \frac{5n^4+48n^3+175n^2+288n+180}{12}\gamma_{n\cdot 1} \\
&\quad + \frac{10n^3+102n^2+359n+435}{3}\gamma_{n\cdot 2} + 2(10n^2+88n+201)\gamma_{n\cdot 3} \\
&\quad + 16(5n+27)\gamma_{n\cdot 4} + 160\gamma_{n\cdot 5}.
\end{aligned}
$$

Die Ableitung der Ausdrücke für die Funktionen P und Q brauche ich hier auch nicht ausführlich zu geben. Wir haben (nach kl. Pl. S. 56—57), wenn wir das Quadrat der Neigung fortlassen:

$$
\begin{aligned}
30) \qquad Q &= -2\sum n\, Q_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \sin nH_1 \\
P &= 2\sum{}' P_{(n.s.s')_{\nu,\nu'}} \varrho^{s} \varrho'^{s'} \eta^{2\nu} \eta'^{2\nu'} \cos nH_1,
\end{aligned}
$$

1) Traité analytique des Orbites absolues des huit Planètes principales, T. I. p. 362—371.

wo für $\nu = \nu' = 0$

31)
$$Q_{n.s.s'} = \Omega_{n.s.s'} - 2\Omega_{n.s-1.s'} + 3\Omega_{n.s-2.s'} - + \cdots$$
$$P_{n.s.s'} = -(s+1)\Omega_{n.s+1.s'}.$$

3. Die Ausdrücke 30) sind nun noch weiter zu transformiren, indem ϱ', η' und H_1 durch die Variable v auszudrücken sind. Auch dies geschieht genau nach dem Kap. V kl. Pl., worauf sich die Entwicklungen kl. Pl. Seite 70 und 78 für Q und P ergeben. Diese Entwicklungen a. a. O. gehen bis zu den zweiten Potenzen der Grössen η und η', und reichen also für die Zwecke der vorliegenden Abhandlung zunächst aus; indessen sind sie mit Bezug auf die Grössen R und K nicht so weit ausgeführt, wie es für die Theorie des Mondes nötig ist; es ist nicht schwer, sie für diesen Zweck zu vervollständigen. Zunächst wollen wir uns aber klar machen, wie das in kl. Pl. Seite 61 und 69 über die Grössen γ, μ, μ_1, K und V Gesagte sich für den Mond modifizirt.

Wir haben nach Relation 16)

$$n = \frac{\sqrt{M}}{a_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{m}_0 + \mathrm{m}}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

und für den störenden Körper

$$n' = \frac{\sqrt{\mathrm{m}' + \mathrm{m}_0 + \mathrm{m}}}{a'^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\mathrm{m}' + M}}{a'^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{M(m'+1)}}{a'^{\frac{3}{2}}}$$

oder auch

32)
$$n' = \frac{k\sqrt{1 + \frac{1}{m'}}}{a'^{\frac{3}{2}}},$$

wo k die Gauss'sche Konstante ist; ferner bezeichnen wir das Verhältniss dieser Bewegungskonstanten

33)
$$\delta = \frac{n'}{n}$$

entsprechend einem charakteristischen Planeten, für den dieses Verhältniss eine kleine Grösse ist. δ ist in unserem Fall etwa $\frac{1}{13}$.

Nach den Ausführungen in kl. Pl. Seite 60—61 erhalten wir

34)
$$v' = \delta v + B + G + \delta W - W'$$
$$B = A' - \mu A, \qquad G = \delta \sum B_n \sin n\mathrm{v} - \sum B'_n \sin n\mathrm{v}'$$

und für das Argument $H_1 = v - v' + \mathrm{H} - \mathrm{H}'$ nach kl. Pl. S. 63

35)
$$H_1 = w_1 - G$$
$$w_1 = (1-\delta)v - B - U$$
$$U = \delta W - W' - \mathrm{H} + \mathrm{H}'.$$

Da wir hier vorerst beabsichtigen, die Bahn des störenden Körpers als Ellipse anzusehen, so ist für unser Problem

$$\varrho' = \eta' \cos(v' - \Pi')$$

wo η' und Π' konstant sind und Excentricität und Länge des Perigäums der Sonne bedeuten, also einfach

$$36) \qquad \eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Pi' = \varkappa' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \Gamma_1, \quad \eta' = \varkappa', \quad \Pi' = \Gamma_1$$

zu setzen ist. Ebenso verschwinden W' und H'.

Im übrigen zeigt sich, dass der sekulare Teil der Funktion W, von dem in kl. Pl. Seite 61 gehandelt ist, beim Monde zum Verschwinden gebracht werden kann, und dass die langperiodischen Glieder in W, welche wir als von der Form A bezeichnet haben, und welche ausserdem vom zweiten Grade (in η und η') sind, nicht übermässig gross ausfallen. Wenn man die Bahn der Sonne nicht als reine Ellipse ansieht, so treten unter diesen Gliedern diejenigen auf, welche die Sekularbeschleunigung des Mondes geben und deren Behandlung auch ausserhalb des Rahmens der vorliegenden Abhandlung fällt*). Auch die Glieder der Form C sind nicht sehr beträchtlich, obwohl ersten Grades, und somit kann die Zerlegung der Funktion U in ihre Teile K und V (kl. Pl. Seite 69) hier zunächst unterbleiben. Wir setzen darum

$$W = K$$

und benutzen im Folgenden den Buchstaben K, um damit anzudeuten, dass diese Funktion keine sehr grossen Glieder enthält.

Indessen wird es sich empfehlen, die Funktion H, obwohl sie das Quadrat der Neigung enthält, nicht principiell fortzulassen, sondern ihren sekularen Teil gleich mit zu berücksichtigen, also zu setzen

$$U = \delta K - \text{p.sec. H},$$

womit nun wird

$$37) \qquad \begin{aligned} w_1 &= (1 - \delta_2) v - B - \delta K \\ \delta_2 v &= \delta v + \text{p.sec. H}. \end{aligned}$$

Wir können nun die Ausdrücke für die Funktionen Q und P unmittelbar hinschreiben in der Form, in der wir sie in der Mondtheorie benutzen wollen. Die entsprechenden Ausdrücke in kl. Pl. S. 70 und 78 enthalten nicht mehr das Argument w_1, sondern w, da dort nach Potenzen von K entwickelt wurde; diese Entwicklung wollen wir im Interesse einer grösseren Schärfe rückgängig machen und wieder w_1 einführen; indem wir auch die höheren Potenzen von R berücksichtigen wollen, erhalten wir mit alleiniger Vernachlässigung der Glieder zweiten und höheren Grades in η und η':

*) A. von Brunn, Die Sekularbeschleunigung des Mondes. Inaugural-Dissertation. Göttingen 1905.

$$
\begin{aligned}
Q &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_{n\cdot 0\cdot 0} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} R + \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} R^2 + \cdots\} \sin nw_1 \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_{n\cdot 1\cdot 0} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} R + \alpha^{(2)}_{n\cdot 1\cdot 0} R^2 + \cdots\} \eta \sin(\mathrm{v} + nw_1) \qquad 38) \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_{n\cdot 0\cdot 1} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} R + \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 1} R^2 + \cdots\} \gamma' \sin(\mathrm{v}_1 + nw_1).
\end{aligned}
$$

Hierbei haben wir auch eine etwas bequemere Schreibweise eingeführt, indem wir die Summen von $-\infty$ bis $+\infty$ nehmen, wobei ein Index erspart wird. Die Indizirung der α-Koeffizienten ist sonst die gleiche wie die der A-Koeffizienten in kl. Pl. und die Beziehungen zwischen beiden sind die folgenden:

für positive n und für $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n\cdot 0_0 0} &= \tfrac{1}{2} A_{n\cdot 0\cdot 0}, & \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= \tfrac{1}{2} A^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} && \text{u. s. w.} \\
\alpha_{n\cdot 1\cdot 0} &= A^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}, & \alpha^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} &= A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} && \text{u. s. w.} \\
\alpha_{n\cdot 0\cdot 1} &= A^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}, & \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} &= A^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} && \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

für negative n:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n\cdot 0\cdot 0} &= -\tfrac{1}{2} A_{-n\cdot 0\cdot 0}, & \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= -\tfrac{1}{2} A^{1\cdot 0}_{-n\cdot 0\cdot 0} && \text{u. s. w.} \\
\alpha_{n\cdot 1\cdot 0} &= -A^{(-1)}_{-n\cdot 1\cdot 0}, & \alpha^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{-n\cdot 1\cdot 0} && \text{u. s. w.} \\
\alpha_{n\cdot 0\cdot 1} &= -A^{(-1)}_{-n\cdot 0\cdot 1}, & \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} &= -A^{-1\cdot 1\cdot 0}_{-n\cdot 0\cdot 1} && \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Die Formeln für die α-Koefficienten seien hier, vollständiger als in kl. Pl., wiederholt:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n\cdot 0\cdot 0} &= -nQ_{n\cdot 0\cdot 0} & \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= -nQ_{n\cdot 2\cdot 0} & \alpha^{(4)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= -nQ_{n\cdot 4\cdot 0} \\
\alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= -nQ_{n\cdot 1\cdot 0} & \alpha^{(3)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= -nQ_{n\cdot 3\cdot 0} & \alpha^{(s)}_{n\cdot 0\cdot 0} &= -nQ_{n\cdot s\cdot 0}
\end{aligned}
\qquad 39)
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{n\cdot 1\cdot 0} &= -n\{Q_{n\cdot 1\cdot 0} + 2n\delta Q_{n\cdot 0\cdot 0}\} & \alpha_{n\cdot 0\cdot 1} &= -(n+1)\{Q_{n+1\cdot 0\cdot 1} - 2(n+1)Q_{n+1\cdot 0\cdot 0}\} \\
\alpha^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -n\{2Q_{n\cdot 2\cdot 0} + 2n\delta Q_{n\cdot 1\cdot 0}\} & \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} &= -(n+1)\{Q_{n+1\cdot 1\cdot 1} - 2(n+1)Q_{n+1\cdot 1\cdot 0}\} \\
\alpha^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -n\{3Q_{n\cdot 3\cdot 0} + 2n\delta Q_{n\cdot 2\ 0}\} & \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 1} &= -(n+1)\{Q_{n+1\cdot 2\cdot 1} - 2(n+1)Q_{n+1\cdot 2\cdot 0}\} \\
\alpha^{(s)}_{n\cdot 1\cdot 0} &= -n\{(s+1)Q_{n\cdot s+1\cdot 0} + 2n\delta Q_{n\cdot s\cdot 0}\} & \alpha^{(s)}_{n\cdot 0\cdot 1} &= -(n+1)\{Q_{n+1\cdot s\cdot 1} - 2(n+1)Q_{n+1\cdot s\cdot 0}\}.
\end{aligned}
$$

Diese Formeln gelten auch für $n = 0$ und für negative n-Werte, wobei nur die Q-Koefficienten, welche negative Indices erhalten, durch die entsprechenden mit positiven Indices zu ersetzen sind.

Die Funktion P hat die folgende Form:

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\beta_{n\cdot 0\cdot 0} + \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} R + \beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} R^2 + \cdots\} \cos nw_1 \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\beta_{n\cdot 1\cdot 0} + \beta^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} R + \beta^{(2)}_{n\cdot 1\cdot 0} R^2 + \cdots\} \eta \cos(\mathrm{v} + nw_1) \qquad 40) \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\beta_{n\cdot 0\cdot 1} + \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} R + \beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 1} R^2 + \cdots\} \eta' \cos(\mathrm{v}_1 + nw_1),
\end{aligned}
$$

wo für positive n:

$$\beta_{n\cdot 0\cdot 0} = \tfrac{1}{2} B_{n\cdot 0\cdot 0}, \quad \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} = \tfrac{1}{2} B^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} \quad \text{u. s. w.}$$
$$\beta_{n\cdot 1\cdot 0} = B^{(+1)}_{n\cdot 1\cdot 0}, \quad \beta^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 1\cdot 0} \quad \text{u. s. w.}$$
$$\beta_{n\cdot 0\cdot 1} = B^{(+1)}_{n\cdot 0\cdot 1}, \quad \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 1} \quad \text{u. s. w.}$$

für negative n:

$$\beta_{n\cdot 0\cdot 0} = \tfrac{1}{2} B_{-n\cdot 0\cdot 0}, \quad \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} = \tfrac{1}{2} B^{1\cdot 0}_{-n\cdot 0\cdot 0} \quad \text{u. s. w.}$$
$$\beta_{n\cdot 1\cdot 0} = B^{(-1)}_{-n\cdot 1\cdot 0}, \quad \beta^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{-n\cdot 1\cdot 0} \quad \text{u. s. w.}$$
$$\beta_{n\cdot 0\cdot 1} = B^{(-1)}_{-n\cdot 0\cdot 1}, \quad \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = B^{-1\cdot 1\cdot 0}_{-n\cdot 0\cdot 1} \quad \text{u. s. w.}$$

für $n = 0$:

$$\beta_{0\cdot 0\cdot 0} = B_{0\cdot 0\cdot 0}, \quad \beta^{(1)}_{0\cdot 0\cdot 0} = B^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} \quad \text{u. s. w.}$$
$$\beta_{0\cdot 1\cdot 0} = B^{(+1)}_{0\cdot 1\cdot 0}, \quad \beta^{(1)}_{0\cdot 1\cdot 0} = B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 1\cdot 0} \quad \text{u. s. w.}$$
$$\beta_{0\cdot 0\cdot 1} = B^{(+1)}_{0\cdot 0\cdot 1}, \quad \beta^{(1)}_{0\cdot 0\cdot 1} = B^{+1\cdot 1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 1} \quad \text{u. s. w.}$$

und also

$$\beta_{n\cdot 0\cdot 0} = P_{n\cdot 0\cdot 0} \qquad \beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} = P_{n\cdot 2\cdot 0} \qquad \beta^{(4)}_{n\cdot 0\cdot 0} = P_{n\cdot 4\cdot 0}$$
$$\beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} = P_{n\cdot 1\cdot 0} \qquad \beta^{(3)}_{n\cdot 0\cdot 0} = P_{n\cdot 3\cdot 0} \qquad \beta^{(s)}_{n\cdot 0\cdot 0} = P_{n\cdot s\cdot 0}$$

41)

$$\beta_{n\cdot 1\cdot 0} = P_{n\cdot 1\cdot 0} + 2n\delta P_{n\cdot 0\cdot 0} \qquad \beta_{n\cdot 0\cdot 1} = P_{n+1\cdot 0\cdot 1} - 2(n+1) P_{n+1\cdot 0\cdot 0}$$
$$\beta^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} = 2P_{n\cdot 2\cdot 0} + 2n\delta P_{n\cdot 1\cdot 0} \qquad \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} = P_{n+1\cdot 1\cdot 1} - 2(n+1) P_{n+1\cdot 1\cdot 0}$$
$$\beta^{(2)}_{n\cdot 1\cdot 0} = 3P_{n\cdot 3\cdot 0} + 2n\delta P_{n\cdot 2\cdot 0} \qquad \beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 1} = P_{n+1\cdot 2\cdot 1} - 2(n+1) P_{n+1\cdot 2\cdot 0}$$
$$\beta^{(s)}_{n\cdot 1\cdot 0} = (s+1) P_{n\cdot s+1\cdot 0} + 2n\delta P_{n\cdot s\cdot 0} \qquad \beta^{(s)}_{n\cdot 0\cdot 1} = P_{n+1\cdot s\cdot 1} - 2(n+1) P_{n+1\cdot s\cdot 0}$$

Für diese Formeln gelten dieselben Bemerkungen, wie für 39).

4. Da α eine sehr kleine Grösse ist, so berechnet man die Integrale $\beta^{(s)}_n$ und $\beta'^{(s)}_n$ am bequemsten durch Entwicklung nach Potenzen von α resp. $m\alpha$; man erhält:

$$\beta^{(s)}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi \left\{ 1 + \frac{s}{2} \alpha^2 \sin^2 \varphi + \frac{s(s+2)}{2.4} \alpha^4 \sin^4 \varphi + \cdots \right\} d\varphi$$

also, wegen:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} \varphi \, d\varphi = \frac{1.3.5 \ldots (2m-1)}{2.4.6 \ldots 2m};$$

$$\beta^{(s)}_n = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \left\{ 1 + \frac{s}{2} \frac{2n+1}{2n+2} \alpha^2 + \frac{s(s+2)}{2.4} \frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)} \alpha^4 + \cdots \right\}$$

und ebenso

$$\beta'^{(s)}_n = \frac{1.3.5 \ldots (2n-1)}{2.4.6 \ldots 2n} \left\{ 1 + \frac{s}{2} \frac{2n+1}{2n+2} m^2 \alpha^2 + \cdots \right\}$$

und hiermit

$$\gamma_{n,0} = \frac{m'}{1+m}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\left\{(1\pm m^{n-1})\alpha^{n+1} + \tfrac{1}{2}\frac{2n+1}{2n+2}(1\pm m^{n+1})\alpha^{n+3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}(1\pm m^{n+3})\alpha^{n+5}+\cdots\right\}$$

42)

$$\gamma_{n,1} = \frac{m'}{1+m}\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}\left\{(1\pm m^{n+1})\alpha^{n+3} + \tfrac{3}{2}\frac{2n+3}{2n+4}(1\pm m^{n+3})\alpha^{n+5}+\cdots\right\}$$

$$\gamma_{n,2} = \frac{m'}{1+m}\frac{1.3.5\ldots(2n+3)}{2.4.6\ldots(2n+4)}\left\{(1\pm m^{n+2})\alpha^{n+5}+\cdots\right\},$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Bezeichnet man

43) $$m'\alpha^3 = \mu^2$$

wo μ äusserst nahe gleich δ ist, sowie

$$\frac{1\pm m^{n+1}}{1+m}\alpha^n = \alpha_n \qquad \begin{pmatrix}+ \text{ für } n \text{ gerade}\\ - \text{ „ } n \text{ ungerade}\end{pmatrix}$$

so wird

$$\gamma_{1,0} = \mu^2\left(\frac{3}{16}\alpha_1 + \frac{15}{128}\alpha_3+\cdots\right)$$

$$\gamma_{2,0} = \mu^2\left(\frac{3}{8} + \frac{5}{32}\alpha_2+\cdots\right)$$

$$\gamma_{3,0} = \mu^2\left(\frac{5}{16}\alpha_1 + \frac{35}{256}\alpha_3+\cdots\right)$$

$$\gamma_{4,0} = \mu^2\left(\frac{35}{128}\alpha_2+\cdots\right)$$

$$\gamma_{5,0} = \mu^2\left(\frac{63}{256}\alpha_3+\cdots\right)$$

44)

$$\gamma_{0,1} = \mu^2\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{32}\alpha_2+\cdots\right)$$

$$\gamma_{1,1} = \mu^2\left(\frac{3}{16}\alpha_1 + \frac{15}{64}\alpha_3+\cdots\right)$$

$$\gamma_{2,1} = \mu^2\left(\frac{5}{32}\alpha_2+\cdots\right)$$

$$\gamma_{3,1} = \mu^2\left(\frac{35}{256}\alpha_3+\cdots\right)$$

$$\gamma_{0,2} = \mu^2\left(\frac{9}{64}\alpha_2+\cdots\right)$$

$$\gamma_{1,2} = \mu^2\left(\frac{15}{128}\alpha_3+\cdots\right).$$

In diesen γ-Koeffizienten sind also nur die Glieder von der Grössenordnung $\mu^2\alpha^4$ vernachlässigt worden; da etwa $\mu = \frac{1}{13}$ und $\alpha = \frac{1}{394}$, so ist die Genauigkeit schon eine grössere, als jemals erforderlich sein wird.

Man kann nun unter Annahme eines bestimmten Wertes für α und m', oder zweckmässiger für μ und m, zuerst die γ-Koeffizienten und hiernach successive die $\mathfrak{Q}$-, Q-, P-, α-, β-Koeffizienten rechnen. Indessen ist es bequemer, und namentlich für eine etwaige Kontrolle der Resultate wünschenswert, die letzteren direkt durch α auszudrücken. Man findet nach 29) und 44):

n	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 2\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 3\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 4\cdot 0}$
0		$-\frac{1}{2}-\frac{9}{16}\alpha_2$	$\frac{3}{4}+\frac{45}{32}\alpha_2$	$-1-\frac{45}{16}\alpha_2$	$\frac{5}{4}+\frac{315}{64}\alpha_2$
1	$\frac{3}{16}\alpha_1+\frac{15}{128}\alpha_3$	$-\frac{9}{16}\alpha_1-\frac{75}{128}\alpha_3$	$\frac{9}{8}\alpha_1+\frac{225}{128}\alpha_3$	$-\frac{15}{8}\alpha_1-\frac{525}{128}\alpha_3$	$\frac{45}{16}\alpha_1+\frac{525}{64}\alpha_3$
2	$\frac{3}{8}+\frac{5}{32}\alpha_2$	$-\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\alpha_2$	$\frac{9}{8}+\frac{25}{16}\alpha_2$	$-\frac{3}{2}-\frac{25}{8}\alpha_2$	$\frac{15}{8}+\frac{175}{32}\alpha_2$
3	$\frac{5}{16}\alpha_1+\frac{35}{256}\alpha_3$	$-\frac{15}{16}\alpha_1-\frac{175}{256}\alpha_3$	$\frac{15}{8}\alpha_1+\frac{525}{256}\alpha_3$	$-\frac{25}{8}\alpha_1-\frac{1225}{256}\alpha_3$	$\frac{75}{16}\alpha_1+\frac{1225}{128}\alpha_3$
4	$\frac{35}{128}\alpha_2$	$-\frac{35}{32}\alpha_2$	$\frac{175}{64}\alpha_2$	$-\frac{175}{32}\alpha_2$	
5	$\frac{63}{256}\alpha_3$	$-\frac{315}{256}\alpha_3$	$\frac{945}{256}\alpha_3$		

n	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 5\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 0\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 2\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 3\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2}\mathfrak{Q}_{n\cdot 4\cdot 1}$
0	$-\frac{3}{2}$		$\frac{9}{4}+\frac{225}{32}\alpha_2$	$-3-\frac{225}{16}\alpha_2$	$\frac{15}{4}$
1		$\frac{3}{4}\alpha_1+\frac{45}{64}\alpha_3$	$\frac{9}{2}\alpha_1+\frac{675}{64}\alpha_3$	$-\frac{15}{2}\alpha_1-\frac{1575}{64}\alpha_3$	
2	$-\frac{9}{4}$	$\frac{9}{8}+\frac{25}{32}\alpha_2$	$\frac{27}{8}+\frac{125}{16}\alpha_2$	$-\frac{9}{2}-\frac{125}{8}\alpha_2$	$\frac{45}{8}$
3		$\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{105}{128}\alpha_3$	$\frac{15}{2}\alpha_1+\frac{1575}{128}\alpha_3$	$-\frac{25}{2}\alpha_1-\frac{3675}{128}\alpha_3$	
4		$\frac{175}{128}\alpha_2$	$\frac{875}{64}\alpha_2$		
5		$\frac{189}{128}\alpha_3$			

$$\mathfrak{Q}_{n\cdot 1\cdot 1} = -2\mathfrak{Q}_{n\cdot 2\cdot 0}.$$

Ferner nach 31):

n	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 2\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 3\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 4\cdot 0}$
1	$-\frac{15}{16}\alpha_1-\frac{105}{128}\alpha_3$	$\frac{45}{16}\alpha_1+\frac{105}{32}\alpha_3$	$-\frac{105}{16}\alpha-\frac{315}{32}\alpha_3$	
2	$-\frac{3}{2}-\frac{15}{16}\alpha_2$	$\frac{15}{4}+\frac{105}{32}\alpha_2$	$-\frac{15}{2}-\frac{35}{4}\alpha_2$	$\frac{105}{8}+\frac{315}{16}\alpha_2$
3	$-\frac{25}{16}\alpha_1-\frac{245}{256}\alpha_3$	$\frac{75}{16}\alpha_1+\frac{245}{64}\alpha_3$	$-\frac{175}{16}\alpha_1-\frac{735}{64}\alpha_3$	
4	$-\frac{105}{64}\alpha_2$	$\frac{735}{128}\alpha_2$		
5	$-\frac{441}{256}\alpha_3$			

$$Q_{n\cdot 0\cdot 0} = \Omega_{n\cdot 0\cdot 0}.$$

n	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 0\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 1\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 2\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2} Q_{n\cdot 3\cdot 1}$
1	$\frac{3}{4}\alpha_1+\frac{45}{64}\alpha_3$	$-\frac{15}{4}\alpha_1-\frac{315}{64}\alpha_3$	$\frac{45}{4}\alpha_1+\frac{315}{16}\alpha_3$	
2	$\frac{9}{8}+\frac{25}{32}\alpha_2$	$-\frac{9}{2}-\frac{75}{16}\alpha_2$	$\frac{45}{4}+\frac{525}{32}\alpha_2$	$-\frac{45}{2}-\frac{175}{4}\alpha_2$
3	$\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{105}{128}\alpha_3$	$-\frac{25}{4}\alpha_1-\frac{735}{128}\alpha_3$	$\frac{75}{4}\alpha_1+\frac{735}{32}\alpha_3$	
4	$\frac{175}{128}\alpha_2$	$-\frac{525}{64}\alpha_2$		
5	$\frac{189}{128}\alpha_3$			

n	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 2\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 3\cdot 0}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 4\cdot 0}$
0	$\frac{1}{2}+\frac{9}{16}\alpha_2$	$-\frac{3}{2}-\frac{45}{16}\alpha_2$	$3+\frac{135}{16}\alpha_2$	$-5-\frac{315}{16}\alpha_2$	$\frac{15}{2}$
1	$\frac{9}{16}\alpha_1+\frac{75}{128}\alpha_3$	$-\frac{9}{4}\alpha_1-\frac{225}{64}\alpha_3$	$\frac{45}{8}\alpha_1+\frac{1575}{128}\alpha_3$	$-\frac{45}{4}\alpha_1-\frac{525}{16}\alpha_3$	
2	$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\alpha_2$	$-\frac{9}{4}-\frac{25}{8}\alpha_2$	$\frac{9}{2}+\frac{75}{8}\alpha_2$	$-\frac{15}{2}-\frac{175}{8}\alpha_2$	$\frac{45}{4}$
3	$\frac{15}{16}\alpha_1+\frac{175}{256}\alpha_3$	$-\frac{15}{4}\alpha_1-\frac{525}{128}\alpha_3$	$\frac{75}{8}\alpha_1+\frac{3675}{256}\alpha_3$	$-\frac{75}{4}\alpha_1-\frac{1225}{32}\alpha_3$	
4	$\frac{35}{32}\alpha_2$	$-\frac{175}{32}\alpha_2$	$\frac{525}{32}\alpha_2$		
5	$\frac{315}{256}\alpha_3$	$-\frac{945}{128}\alpha_3$			

n	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 0\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 1\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 2\cdot 1}$	$\frac{1}{\mu^2} P_{n\cdot 3\cdot 1}$
0	$\frac{3}{2}+\frac{45}{16}\alpha_2$	$-\frac{9}{2}-\frac{225}{16}\alpha_2$	$9+\frac{675}{16}\alpha_2$	-15
1	$\frac{9}{4}\alpha_1+\frac{225}{64}\alpha_3$	$-9\alpha_1-\frac{675}{32}\alpha_3$	$\frac{45}{2}\alpha_1+\frac{4725}{64}\alpha_3$	
2	$\frac{9}{4}+\frac{25}{8}\alpha_2$	$-\frac{27}{4}-\frac{125}{8}\alpha_2$	$\frac{27}{2}+\frac{375}{8}\alpha_2$	$-\frac{45}{2}$
3	$\frac{15}{4}\alpha_1+\frac{525}{128}\alpha_3$	$-15\alpha_1-\frac{1575}{64}\alpha_3$	$\frac{75}{2}\alpha_1+\frac{11025}{128}\alpha_3$	
4	$\frac{175}{32}\alpha_2$	$-\frac{875}{32}\alpha_2$		
5	$\frac{945}{128}\alpha_3$			

Bei Ansetzung der Formeln für die α- und β-Koeffizienten wollen wir deren Grössenordnung zur Evidenz bringen, weil dies für unsere späteren Entwicklungen notwendig ist, und zwar führen wir folgende Bezeichnungen ein:

n	$\alpha_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\alpha^{(3)}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\alpha^{(4)}_{n\cdot 0\cdot 0}$
± 1	$\pm A_{1\cdot 0}\mu^2\alpha$	$\pm A_{1\cdot 1}\mu^2\alpha$	$\pm A_{1\cdot 2}\mu^2\alpha$	$\pm A_{1\cdot 3}\mu^2\alpha$	
± 2	$\pm A_{2\cdot 0}\mu^2$	$\pm A_{2\cdot 1}\mu^2$	$\pm A_{2\cdot 2}\mu^2$	$\pm A_{2\cdot 3}\mu^2$	$\pm A_{2\cdot 4}\mu^2$
± 3	$\pm A_{3\cdot 0}\mu^2\alpha$	$\pm A_{3\cdot 1}\mu^2\alpha$	$\pm A_{3\cdot 2}\mu^2\alpha$	$\pm A_{3\cdot 3}\mu^2\alpha$	
± 4	$\pm A_{4\cdot 0}\mu^2\alpha^2$	$\pm A_{4\cdot 1}\mu^2\alpha^2$	$\pm A_{4\cdot 2}\mu^2\alpha^2$		
± 5	$\pm A_{5\cdot 0}\mu^2\alpha^3$	$\pm A_{5\cdot 1}\mu^2\alpha^3$			

n	$\beta_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\beta^{(3)}_{n\cdot 0\cdot 0}$	$\beta^{(4)}_{n\cdot 0\cdot 0}$
0	$B_{0\cdot 0}\mu^2$	$B_{0\cdot 1}\mu^2$	$B_{0\cdot 2}\mu^2$	$B_{0\cdot 3}\mu^2$	$B_{0\cdot 4}\mu^2$
± 1	$B_{1\cdot 0}\mu^2\alpha$	$B_{1\cdot 1}\mu^2\alpha$	$B_{1\cdot 2}\mu^2\alpha$	$B_{1\cdot 3}\mu^2\alpha$	
± 2	$B_{2\cdot 0}\mu^2$	$B_{2\cdot 1}\mu^2$	$B_{2\cdot 2}\mu^2$	$B_{2\cdot 3}\mu^2$	$B_{2\cdot 4}\mu^2$
± 3	$B_{3\cdot 0}\mu^2\alpha$	$B_{3\cdot 1}\mu^2\alpha$	$B_{3\cdot 2}\mu^2\alpha$	$B_{3\cdot 3}\mu^2\alpha$	
± 4	$B_{4\cdot 0}\mu^2\alpha^2$	$B_{4\cdot 1}\mu^2\alpha^2$	$B_{4\cdot 2}\mu^2\alpha^2$		
± 5	$B_{5\cdot 0}\mu^2\alpha^3$	$B_{5\cdot 1}\mu^2\alpha^3$			

In diesen Ausdrücken ist:

$$A_{0,0} = 0 \qquad B_{0,0} = \frac{1}{2} + \frac{9}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,0} = -\frac{3}{16}(1-m) - \frac{15}{128}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{1,0} = \frac{9}{16}(1-m) + \frac{75}{128}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{2,0} = -\frac{3}{4} - \frac{5}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{2,0} = \frac{3}{4} + \frac{5}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{3,0} = -\frac{15}{16}(1-m) - \frac{105}{256}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{3,0} = \frac{15}{16}(1-m) + \frac{175}{256}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{4,0} = -\frac{35}{32}\frac{1+m^3}{1+m} \qquad B_{4,0} = \frac{35}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{5,0} = -\frac{315}{256}\frac{1-m^4}{1+m} \qquad B_{5,0} = \frac{315}{256}\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$A_{0,1} = 0 \qquad B_{0,1} = -\frac{3}{2} - \frac{45}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,1} = \frac{15}{16}(1-m) + \frac{105}{128}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{1,1} = -\frac{9}{4}(1-m) - \frac{225}{64}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{2,1} = 3 + \frac{15}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{2,1} = -\frac{9}{4} - \frac{25}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{3,1} = \frac{75}{16}(1-m) + \frac{735}{256}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{3,1} = -\frac{15}{4}(1-m) - \frac{525}{128}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{4,1} = \frac{105}{16}\frac{1+m^3}{1+m} \qquad B_{4,1} = -\frac{175}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

45) $$A_{5,1} = \frac{2205}{256}\frac{1-m^4}{1+m} \qquad B_{5,1} = -\frac{945}{128}\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$A_{0,2} = 0 \qquad B_{0,2} = 3 + \frac{135}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,2} = -\frac{45}{16}(1-m) - \frac{105}{32}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{1,2} = \frac{45}{8}(1-m) + \frac{1575}{128}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{2,2} = -\frac{15}{2} - \frac{105}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{2,2} = \frac{9}{2} + \frac{75}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{3,2} = -\frac{225}{16}(1-m) - \frac{735}{64}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{3,2} = \frac{75}{8}(1-m) + \frac{3675}{256}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{4,2} = -\frac{735}{32}\frac{1+m^3}{1+m} \qquad B_{4,2} = \frac{525}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{0,3} = 0 \qquad B_{0,3} = -5 - \frac{315}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,3} = \frac{105}{16}(1-m) \qquad B_{1,3} = -\frac{45}{4}(1-m)$$

$$A_{2,3} = 15 + \frac{35}{2}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{2,3} = -\frac{15}{2} - \frac{175}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{3,3} = \frac{525}{16}(1-m) \qquad B_{3,3} = -\frac{75}{4}(1-m)$$

$$A_{0,4} = 0 \qquad B_{0,4} = \frac{15}{2}$$

$$A_{2,4} = -\frac{105}{4} \qquad B_{2,4} = \frac{45}{4}$$

Weiter bezeichnen wir:

n	$\beta_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\beta^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\beta^{(2)}_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\beta^{(3)}_{n\cdot 1\cdot 0}$	$\beta_{n\cdot 0\cdot 1}$	$\beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1}$	$\beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 1}$	$\beta^{(3)}_{n\cdot 0\cdot 1}$
-6					$B_{-6\cdot 11}\mu^2\alpha^3$			
-5	$B_{-5\cdot 6}\mu^2\alpha^3$				$B_{-5\cdot 11}\mu^2\alpha^2$	$B_{-5\cdot 12}\mu^2\alpha^2$		
-4	$B_{-4\cdot 6}\mu^2\alpha^2$	$B_{-4\cdot 7}\mu^2\alpha^2$			$B_{-4\cdot 11}\mu^2\alpha$	$B_{-4\cdot 12}\mu^2\alpha$	$B_{-4\cdot 13}\mu^2\alpha$	
-3	$B_{-3\cdot 6}\mu^2\alpha$	$B_{-3\cdot 7}\mu^2\alpha$	$B_{-3\cdot 8}\mu^2\alpha$		$B_{-3\cdot 11}\mu^2$	$B_{-3\cdot 12}\mu^2$	$B_{-3\cdot 13}\mu^2$	$B_{-3\cdot 14}\mu^2$
-2	$B_{-2\cdot 6}\mu^2$	$B_{-2\cdot 7}\mu^2$	$B_{-2\cdot 8}\mu^2$	$B_{-2\cdot 9}\mu^2$	$B_{-2\cdot 11}\mu^2\alpha$	$B_{-2\cdot 12}\mu^2\alpha$	$B_{-2\cdot 13}\mu^2\alpha$	
-1	$B_{-1\cdot 6}\mu^2\alpha$	$B_{-1\cdot 7}\mu^2\alpha$	$B_{-1\cdot 8}\mu^2\alpha$		$B_{-1\cdot 11}\mu^2$	$B_{-1\cdot 12}\mu^2$	$B_{-1\cdot 13}\mu^2$	$B_{-1\cdot 14}\mu^2$
0	$B_{0\cdot 6}\mu^2$	$B_{0\cdot 7}\mu^2$	$B_{0\cdot 8}\mu^2$	$B_{0\cdot 9}\mu^2$	$B_{0\cdot 11}\mu^2\alpha$	$B_{0\cdot 12}\mu^2\alpha$	$B_{0\cdot 13}\mu^2\alpha$	
1	$B_{1\cdot 6}\mu^2\alpha$	$B_{1\cdot 7}\mu^2\alpha$	$B_{1\cdot 8}\mu^2\alpha$		$B_{1\cdot 11}\mu^2$	$B_{1\cdot 12}\mu^2$	$B_{1\cdot 13}\mu^2$	$B_{1\cdot 14}\mu^2$
2	$B_{2\cdot 6}\mu^2$	$B_{2\cdot 7}\mu^2$	$B_{2\cdot 8}\mu^2$	$B_{2\cdot 9}\mu^2$	$B_{2\cdot 11}\mu^2\alpha$	$B_{2\cdot 12}\mu^2\alpha$	$B_{2\cdot 13}\mu^2\alpha$	
3	$B_{3\cdot 6}\mu^2\alpha$	$B_{3\cdot 7}\mu^2\alpha$	$B_{3\cdot 8}\mu^2\alpha$		$B_{3\cdot 11}\mu^2\alpha^2$	$B_{3\cdot 12}\mu\ \alpha^2$		
4	$B_{4\cdot 6}\mu^2\alpha^2$	$B_{4\cdot 7}\mu^2\alpha^2$			$B_{4\cdot 11}\mu^2\alpha^3$			
5	$B_{5\cdot 6}\mu^2\alpha^3$							

Für die α-Koeffizienten gelten die analogen Ausdrücke, nur sind die Koeffizienten

$$A_{0\cdot 6},\quad A_{0\cdot 7},\quad A_{0\cdot 8},\quad A_{0\cdot 9};\quad A_{-1\cdot 11},\quad A_{-1\cdot 12},\quad A_{-1\cdot 13},\quad A_{-1\cdot 14}$$

gleich Null.

Für die A- und B-Koeffizienten ergeben sich die folgenden Werte:

$$A_{\pm 5\cdot 6} = \frac{1575}{128}\left(\pm\frac{7}{10}-\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m} \qquad B_{\pm 5\cdot 6} = -\frac{1575}{128}\left(\frac{3}{5}\mp\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$A_{\pm 4\cdot 6} = \frac{35}{4}\left(\pm\frac{3}{4}-\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m} \qquad B_{\pm 4\cdot 6} = -\frac{35}{4}\left(\frac{5}{8}\mp\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{\pm 3\cdot 6} = \frac{45}{8}\left(\pm\frac{5}{6}-\delta\right)(1-m)+\frac{315}{128}\left(\pm\frac{7}{6}-\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{\pm 3\cdot 6} = -\frac{45}{8}\left(\frac{2}{3}\mp\delta\right)(1-m)-\frac{525}{128}(1\mp\delta)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 2\cdot 6} = 3(\pm 1-\delta)+\frac{5}{4}\left(\pm\frac{3}{2}-\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{\pm 2\cdot 6} = -3\left(\frac{3}{4}\mp\delta\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{5}{4}\mp\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 1\cdot 6} = \frac{3}{8}\left(\pm\frac{5}{2}-\delta\right)(1-m)+\frac{15}{64}\left(\pm\frac{7}{2}-\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B'_{\pm 1\cdot 6} = -\frac{9}{8}(2\mp\delta)(1-m)-\frac{75}{64}(3\mp\delta)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{0\cdot 6} = 0 \qquad B_{0\cdot 6} = -\frac{3}{2}-\frac{45}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 4,7} = -\frac{105}{2}\left(\pm\frac{7}{8}-\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{\pm 3,7} = -\frac{225}{8}(\pm 1-\delta)(1-m)-\frac{2205}{128}\left(\pm\frac{4}{3}-\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 2,7} = -12\left(\pm\frac{5}{4}-\delta\right)-\frac{15}{2}\left(\pm\frac{7}{4}-\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 1,7} = -\frac{15}{8}(\pm 3-\delta)(1-m)-\frac{105}{64}(\pm 4-\delta)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{0,7} = 0$$

$$A_{\pm 3,8} = \frac{675}{8}\left(\pm\frac{7}{6}-\delta\right)(1-m)+\frac{2205}{32}\left(\pm\frac{3}{2}-\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 2,8} = 30\left(\pm\frac{3}{2}-\delta\right)+\frac{105}{4}(\pm 2-\delta)\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{\pm 1,8} = \frac{45}{8}\left(\pm\frac{7}{2}-\delta\right)(1-m)+\frac{105}{16}\left(\pm\frac{9}{2}-\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{0,8} = 0$$

$$A_{\pm 2,9} = -60\left(\pm\frac{7}{4}-\delta\right)$$

$$A_{0,9} = 0$$

$$A_{-6,11} = \frac{315}{16}\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$A_{-5,11} = \frac{455}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{-4,11} = \frac{75}{8}(1-m)+\frac{315}{64}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-3,11} = \frac{21}{4}+\frac{45}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-2,11} = \frac{9}{8}(1-m)+\frac{15}{16}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-1,11} = 0$$

$$A_{0,11} = -\frac{3}{8}(1-m)-\frac{15}{32}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,11} = \frac{3}{4}-\frac{5}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{2,11} = \frac{15}{8}(1-m)$$

$$A_{3,11} = \frac{105}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{4,11} = \frac{315}{64}\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$B_{\pm 4,7} = \frac{175}{4}\left(\frac{3}{4}\mp\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$B_{\pm 3,7} = \frac{45}{2}\left(\frac{5}{6}\mp\delta\right)(1-m)+\frac{1575}{64}\left(\frac{7}{6}\mp\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{\pm 2,7} = 9(1\mp\delta)+\frac{25}{2}\left(\frac{3}{2}\mp\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{\pm 1,7} = \frac{9}{2}\left(\frac{5}{2}\mp\delta\right)(1-m)+\frac{225}{32}\left(\frac{7}{2}\mp\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{0,7} = 6+\frac{135}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{\pm 3,8} = -\frac{225}{4}(1\mp\delta)(1-m)-\frac{11025}{128}\left(\frac{4}{3}\mp\delta\right)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{\pm 2,8} = -18\left(\frac{5}{4}\mp\delta\right)-\frac{75}{2}\left(\frac{7}{4}\mp\delta\right)\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{\pm 1,8} = -\frac{45}{4}(3\mp\delta)(1-m)-\frac{1575}{64}(4\mp\delta)\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{0,8} = -15-\frac{945}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{\pm 2,9} = 30\left(\frac{3}{2}\mp\delta\right)$$

$$B_{0,9} = 30$$

$$B_{-6,11} = \frac{315}{16}\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$B_{-5,11} = \frac{455}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$B_{-4,11} = \frac{75}{8}(1-m)+\frac{525}{64}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{-3,11} = \frac{21}{4}+\frac{45}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{-2,11} = \frac{27}{8}(1-m)+\frac{75}{16}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{-1,11} = \frac{3}{2}+\frac{45}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{0,11} = \frac{9}{8}(1-m)+\frac{75}{32}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{1,11} = -\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$B_{2,11} = -\frac{15}{8}(1-m)$$

$$B_{3,11} = -\frac{105}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$B_{4,11} = -\frac{315}{64}\frac{1-m^4}{1+m}$$

$$A_{-5,12} = -\frac{1365}{16}\frac{1+m^3}{1+m} \qquad B_{-5,12} = -\frac{2275}{32}\frac{1+m^3}{1+m}$$

$$A_{-4,12} = -\frac{375}{8}(1-m) - \frac{2205}{64}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{-4,12} = -\frac{75}{2}(1-m) - \frac{1575}{32}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-3,12} = -21 - \frac{135}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{-3,12} = -\frac{63}{4} - \frac{225}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-2,12} = -\frac{45}{8}(1-m) - \frac{105}{16}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{-2,12} = -\frac{27}{2}(1-m) - \frac{225}{8}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-1,12} = 0 \qquad B_{-1,12} = -\frac{9}{2} - \frac{225}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{0,12} = \frac{15}{8}(1-m) + \frac{105}{32}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{0,12} = -\frac{9}{2}(1-m) - \frac{225}{16}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,12} = -3 + \frac{15}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{1,12} = \frac{9}{4} - \frac{25}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{2,12} = -\frac{75}{8}(1-m) \qquad B_{2,12} = \frac{15}{2}(1-m)$$

$$A_{3,12} = -\frac{315}{16}\frac{1+m^3}{1+m} \qquad B_{3,12} = \frac{525}{32}\frac{1+m^4}{1+m}$$

$$A_{-4,13} = \frac{1125}{8}(1-m) + \frac{2205}{16}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{-4,13} = \frac{375}{4}(1-m) + \frac{11025}{64}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-3,13} = \frac{105}{2} + \frac{945}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{-3,13} = \frac{63}{2} + \frac{675}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-2,13} = \frac{135}{8}(1-m) + \frac{105}{4}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{-2,13} = \frac{135}{4}(1-m) + \frac{1575}{16}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{-1,13} = 0 \qquad B_{-1,13} = 9 + \frac{675}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{0,13} = -\frac{45}{8}(1-m) - \frac{105}{8}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{0,13} = \frac{45}{4}(1-m) + \frac{1575}{32}\frac{1-m^4}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{1,13} = \frac{15}{2} - \frac{105}{16}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2 \qquad B_{1,13} = -\frac{9}{2} + \frac{75}{8}\frac{1+m^3}{1+m}\alpha^2$$

$$A_{2,13} = \frac{225}{8}(1-m) \qquad B_{2,13} = -\frac{75}{4}(1-m)$$

$$A_{-3,14} = -105 \qquad B_{-3,14} = -\frac{105}{2}$$

$$A_{-1,14} = 0 \qquad B_{-1,14} = -15$$

$$A_{1,14} = -15 \qquad B_{1,14} = \frac{15}{2}$$

In den Koeffizienten $A_{2.11}$, $B_{2.11}$, $A_{2.12}$, $B_{2.12}$, $A_{2.13}$, $B_{2.13}$ fällt das mit α^2 multiplizirte Glied fort. Man wird bemerken, dass es zwischen den vorstehenden Koeffizienten eine Reihe genähert geltender Relationen gibt, welche zur Kontrolle dienen können, z. B.:

$$\begin{aligned}
A_{-2.s} &= -3A_{0.s} & B_{-2.s} &= 3B_{0.s} \\
A_{-3.s} &= 7A_{1.s} & B_{-3.s} &= -7B_{1.s} \\
A_{-4.s} &= 5A_{2.s} & B_{-4.s} &= -5B_{2.s} \qquad (s = 12, 13, 14) \\
A_{-5.s} &= \frac{13}{3}A_{3.s} & B_{-5.s} &= -\frac{13}{3}B_{3.s} \\
A_{-6.s} &= 4A_{4.s} & B_{-6.s} &= -4B_{4.s}.
\end{aligned}$$

5. Wir wollen nun die numerischen Werte der vorstehenden Koeffizienten geben; bei der Rechnung sind für die Massen die Werte von Herrn Newcomb angewandt worden, nämlich

$$\frac{\text{Sonne}}{\text{Erde} + \text{Mond}} = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}} = 329390$$

$$\frac{\text{Mond}}{\text{Erde}} = \frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}_0} = m = \frac{1}{81{,}45}.$$

Für die Grösse μ habe ich einen etwas abgerundeten Näherungswert für das Verhältnis der mittleren Bewegungen von Sonne und Mond genommen, nämlich

$$\log \mu = 8{,}8739100 - 10.$$

Hiermit ergaben sich die folgenden Werte unserer Konstanten:

$$\begin{aligned}
\log m &= 8{,}08911 - 10 \\
\log (1+m) &= 0{,}0052996 \\
\log m' &= 5{,}5336092 \\
\log \alpha &= 7{,}4047369 - 10 \\
\log \delta &= 8{,}8739106 - 10
\end{aligned}$$

bei deren Berechnung die Formeln

$$m' = \frac{\mathfrak{m}'}{\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}}(1+m)^3, \quad \alpha = \sqrt[3]{\frac{\mu^2}{m'}}, \quad \delta = \frac{n'}{n} = \mu\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{m}_0 + \mathfrak{m}}{m'}}$$

angewandt wurden. Hiernach ergibt sich:

n	$\log A_{n,0}$	$\log A_{n,1}$	$\log A_{n,2}$	$\log A_{n,3}$	$\log A_{n,4}$
0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
1	$9{,}26763_n$	9,96660	$0{,}44372_n$	0,81170	
2	$9{,}8750624_n$	0,4771230	$0{,}8750637_n$	1,17609	1,41913
3	$9{,}96660_n$	0,66557	$1{,}14269_n$	1,51067	
4	$0{,}03362_n$	0,81177	$1{,}35584_n$		
5	$0{,}08477_n$	0,92988			

n	$\log B_{n,0}$	$\log B_{n,1}$	$\log B_{n,2}$	$\log B_{n,3}$	$\log B_{n,4}$
0	9,6989731	$0{,}1760965_n$	0,4771291	$0{,}69898_n$	0,87506
1	9,74475	$0{,}34681_n$	0,74476	$1{,}04579_n$	
2	9,8750636	$0{,}3521864_n$	0,6532183	$0{,}87507_n$	1,05115
3	9,96660	$0{,}56866_n$	0,96660	$1{,}26764_n$	
4	0,03362	$0{,}73259_n$	1,20971		
5	0,08477	$0{,}86293_n$			

n	$\log A_{n,6}$	$\log A_{n,7}$	$\log A_{n,8}$	$\log A_{n,9}$	$\log B_{n,6}$	$\log B_{n,7}$	$\log B_{n,8}$	$\log B_{n,9}$
-5	$0{,}97396_n$				$0{,}91394_n$			
-4	$0{,}85306_n$	1,69249			$0{,}78168_n$	1,55203		
-3	$0{,}70290_n$	1,47505	$2{,}01478_n$		$0{,}61484_n$	1,30496	$1{,}77609_n$	
-2	$0{,}5084512_n$	1,2013344	$1{,}67434_n$	2,03937	$0{,}3934745_n$	0,9855763	$1{,}37743_n$	1,67435
-1	$9{,}97940_n$	0,75545	$1{,}29800_n$		$0{,}36276_n$	1,05859	$1{,}53361_n$	
0	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$0{,}1760965_n$	0,7781591	$1{,}17610_n$	1,47712
1	9,95341	$0{,}73378_n$	1,27944		$0{,}33026_n$	1,03260	$1{,}51194_n$	
2	0,4433580	1,1492048	1,63099	2,00221	$0{,}3065568_n$	0,9204833	$1{,}32539_n$	1,63099
3	0,62473	$1{,}40995_n$	1,95901		$0{,}51697_n$	1,22679	$1{,}71099_n$	
4	0,76614	$1{,}61806_n$			$0{,}67723_n$	1,46511		
5	0,88079				$0{,}80509_n$			

n	$\log A_{n,11}$	$\log A_{n,12}$	$\log A_{n,13}$	$\log A_{n,14}$	$\log B_{n,11}$	$\log B_{n,12}$	$\log B_{n,13}$	$\log B_{n,14}$
-6	1,28889				1,28889			
-5	1,14756	$1{,}92571_n$			1,14756	$1{,}84653_n$		
-4	0,96660	$1{,}66557_n$	2,14269		0,96660	$1{,}56866_n$	1,96661	
-3	0,7201445	$1{,}3222215_n$	1,72016	2,02119	0,7201622	$1{,}1972855_n$	1,49832	1,72016
-2	0,04578	$0{,}74475_n$	1,22187		0,52290	$1{,}12497_n$	1,52291	
-1	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0,1760965	0,6532212	0,95425	1,17609
0	$9{,}56866_n$	0,26763	$0{,}74476_n$		0,04579	$0{,}64785_n$	1,04579	
1	9,8750601	0,4771196	0,87505	1,17609	9,8750590	0,3521787	0,65320	0,87506
2	0,26763	$0{,}96660_n$	1,44372		0,26763	0,86969	1,26763	
3	0,51074	$1{,}28889_n$			$0{,}51074_n$	1,20971		
4	0,68683				$0{,}68683_n$			

Im vorigen sind nur einige Koeffizienten, welche zu den grössten Gliedern gehören, siebenstellig gegeben; alle übrigen, und namentlich alle zu parallaktischen Gliedern gehörenden, auf fünf Dezimalen, was auch für die schärfste Rechnung ausreicht.

III. Kapitel.

Einführung der periodischen Lösung nullten Grades.

1. Wir kommen nun zum Kernpunkt unserer Methode, nämlich zur Ermittlung der Glieder nullten Grades oder derjenigen periodischen Lösung, welche schon Herr Hill in sehr schöner Weise behandelt hat; allerdings werden wir einen ganz anderen Weg einschlagen, als Herr Hill, da ja auch unsere Differentialgleichungen ganz andere sind. An der Hand dieser Lösung nullten Grades werden wir dann die Ausdrücke für die Funktionen Q und P so transformiren, dass die Entwicklungen nach Potenzen der störenden Masse, resp. der Grösse μ, beseitigt werden. Wir erhalten dann also nur Reihen, welche nach Potenzen der Grössen η und η' (der Exzentrizitäten) fortschreiten; es ist dies ein Gedanke, den ebenfalls schon Herr Hill ausgesprochen hat.

Im § 2 des 6. Kapitels und § 1 des 7. Kapitels der Theorie der kleinen Planeten habe ich die Berechnung der Glieder nullten Grades soweit gegeben, wie es für das Problem der kleinen Planeten vollkommen ausreicht. Für den Mond müssen wir anders verfahren, um diese Lösung mit wünschenswerter Schärfe zu erhalten, da hier die Konvergenz der Reihen nach der störenden Masse, d. h. nach der Grösse μ^2, erheblich schwächer ist als im Falle der Planeten.

Jedenfalls stellen sich die Gyldén'schen Koordinaten in der periodischen Lösung, wie folgt, dar:

$$47) \qquad \begin{aligned} S_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \\ R_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} b_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \\ K_0 = W_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{n\cdot 0\cdot 0} \sin nw, \end{aligned}$$

wo $a_{n\cdot 0\cdot 0}$, $b_{n\cdot 0\cdot 0}$, $c_{n\cdot 0\cdot 0}$ konstante Koeffizienten sind.

Das Argument w steht zu dem Argument w_1 (vgl. Gleichung 37)) in der Beziehung:

$$w_1 = w - \delta K,$$

also:

$$48) \qquad w = (1-\delta_2)\, v - B.$$

2. Wenn wir nun bezeichnen:

$$49) \qquad \begin{aligned} R &= R_0 + R^{(1)} \\ K &= K_0 + K^{(1)} \\ S &= S_0 + S^{(1)}, \end{aligned}$$

wo also $R^{(1)}$, $K^{(1)}$, $S^{(1)}$ mit η und η' verschwinden, und wenn wir, wie auch schon in den kl. Pl., unter Q_0 und P_0 denjenigen Teil dieser Funktionen verstehen, der von η und η' frei ist, also der periodischen Lösung entspricht, so ist offenbar:

$$50) \qquad \begin{aligned} Q_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\alpha_{n\cdot 0\cdot 0} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 + \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0^2 + \cdots\} \sin\,(nw - n\delta K_0) \\ P_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\beta_{n\cdot 0\cdot 0} + \beta^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 + \beta^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0^2 + \cdots\} \cos\,(nw - n\delta K_0). \end{aligned}$$

Wir multipliziren diese beiden Ausdrücke mit $(1+S_0)^2$, weil sie in dieser Form in unseren Differentialgleichungen auftreten, und können dann offenbar schreiben, indem wir uns für R_0, S_0, K_0 ihre Ausdrücke 47) eingesetzt denken, und nach Potenzen von K_0 entwickeln:

$$51) \qquad \begin{aligned} (1+S_0)^2\, Q_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 0\cdot 0} \sin nw \\ (1+S_0)^2\, P_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} p_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw. \end{aligned}$$

Verstehen wir unter R_1, S_1, K_1, Q_1, P_1 den Teil dieser Funktionen, welcher ersten Grades ist, d. h. welcher nur von den ersten Potenzen von η und η' abhängt, so können wir in ganz ähnlicher Weise schreiben:

$$52) \qquad \begin{aligned} (1+S_0)^2\, Q_1 = &\sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 1\cdot 0}\, \eta \sin(\mathrm{v} + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \sin nw \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 0\cdot 1}\, \eta' \sin(\mathrm{v}_1 + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \cos nw \\ (1+S_0)^2\, P_1 = &\sum_{-\infty}^{+\infty} p_{n\cdot 1\cdot 0}\, \eta \cos(\mathrm{v} + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \cos nw \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} p_{n\cdot 0\cdot 1}\, \eta' \cos(\mathrm{v}_1 + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \sin nw. \end{aligned}$$

In den Ausdrücken 51) und 52) sind die Entwicklungen nach Potenzen von μ beseitigt. Die p- und q-Koeffizienten in 51) und 52) hängen nur ab von den α- und β-Koeffizienten der Entwicklungen 38) und 40) und von den $a_{n\cdot 0\cdot 0}$, $b_{n\cdot 0\cdot 0}$, $c_{n\cdot 0\cdot 0}$.

Die letzteren sind zunächst noch unbekannt; unsere nächste Aufgabe wird also sein müssen, die periodische Lösung nullten Grades mit aller wünschenswerten Schärfe zu bestimmen, d. h. die Koeffizienten $a_{n\cdot 0\cdot 0}$, $b_{n\cdot 0\cdot 0}$, $c_{n\cdot 0\cdot 0}$ mit Benutzung der Entwicklungen 51) zu berechnen. Die Schwierigkeit beruht darauf, dass in 51) die $q_{n\cdot 0\cdot 0}$ und $p_{n\cdot 0\cdot 0}$ die zu bestimmenden Koefficienten implizite enthalten; indessen ist diese Schwierigkeit eine rein numerische: es lassen sich die Relationen zur Bestimmung dieser Koeffizienten aufstellen und durch successive (rein numerische) Näherungen lösen. Ist dies einmal ausgeführt, so hat man gewonnenes Spiel für die Berechnung aller mit η und η' multiplizirten Glieder; denn z. B. in 52) lassen sich dann die p- und q-Koeffizienten hiernach direkt berechnen.

3. Es ist also unsere nächste Aufgabe, die Relationen herzustellen, welche die p- und q-Koeffizienten durch die α- und β-Koeffizienten und die $a_{n\cdot 0\cdot 0}$, $b_{n\cdot 0\cdot 0}$, $c_{n\cdot 0\cdot 0}$ ausdrücken. Hierzu orientiren wir uns zunächst über die Grössenordnung dieser letzteren, nachdem wir die der α- und β-Koeffizienten bereits auf Seite 28 zur Evidenz gebracht haben.

Einige Überlegung zeigt, dass in den R_0, K_0, S_0 die Koeffizienten $a_{n\cdot 0\cdot 0}$ etc. nach Potenzen von μ^2 fortschreiten und zwar einerseits für die geraden n-Werte — die hierzu gehörigen Glieder pflegt man als Variation zu bezeichnen —, und andererseits für die ungeraden n-Werte, welche sämmtlich parallaktisch, d. h. mit der kleinen Grösse α multiplizirt sind. Wenn ich die symbolische Bezeichnung $= O(\mu^m \alpha^n)$ benutze, welche „von der Ordnung $\mu^m \alpha^n$" bedeuten soll, so können wir schreiben:

für n gerade:	rür n ungerade:
$b_{0\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^2)$	$b_{1\cdot 0\cdot 0} = O(\mu\,\alpha)$
$b_{2\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^2)$	$b_{3\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^2\,\alpha)$
$b_{4\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^4)$	$b_{5\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^4\,\alpha)$
. . . . .	. . . . .
$b_{n\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^n)$	$b_{n\cdot 0\cdot 0} = O(\mu^{n-1}\,\alpha)$,

$b_{1\cdot 0\cdot 0}$ (das gewöhnlich als „parallaktisches" bezeichnete Glied) ist von der Ordnung $\mu\alpha$, weil es den Divisor δ_2 erhält, der sehr nahe (vgl. Seite 33) gleich μ ist; ursprünglich enthält es den Faktor $\mu^2\alpha$. Die $c_{n\cdot 0\cdot 0}$ sind von derselben Ordnung wie die $b_{n\cdot 0\cdot 0}$; die $a_{n\cdot 0\cdot 0}$ ebenfalls, mit Ausnahme von $a_{1\cdot 0\cdot 0}$, das von der Ordnung $\mu^2\alpha$ ist.

Wir sind nun in der Lage, für diese Koeffizienten die folgenden Ausdrücke anzusetzen, welche ihre Grössenordnung hervortreten lassen.

53)

n	$a_{n\cdot 0\cdot 0}$	$b_{n\cdot 0\cdot 0}$	$c_{n\cdot 0\cdot 0}$
0	$a_0\mu^2$	$b_0\mu^2$	
±1	$a_1\mu^2\alpha$	$b_1\mu\alpha$	$\pm c_1\mu\alpha$
±2	$a_2\mu^2$	$b_2\mu^2$	$\pm c_2\mu^2$
±3	$a_3\mu^2\alpha$	$b_3\mu^2\alpha$	$\pm c_3\mu^2\alpha$
±4	$a_4\mu^4$	$b_4\mu^4$	$\pm c_4\mu^4$
±5	$a_5\mu^4\alpha$	$b_5\mu^4\alpha$	$\pm c_5\mu^4\alpha$
±6	$a_6\mu^6$	$b_6\mu^6$	$\pm c_6\mu^6$
±7	$a_7\mu^6\alpha$	$b_7\mu^6\alpha$	$\pm c_7\mu^6\alpha$
±8	$a_8\mu^8$	$b_8\mu^8$	$\pm c_8\mu^8$

Den Koeffizienten c_0 werden wir zum Verschwinden bringen durch passende Wahl von a_0, welches als überzählige Integrationskonstante auftritt.

Die Entwicklung der periodischen Lösung bis zu den Gliedern von der Ordnung μ^8 (resp. $\mu^6\alpha$, $\mu^4\alpha^2$, ...), d. h. mit Vernachlässigung von μ^{10}, $\mu^8\alpha$ etc., dürfte zunächst die nötige Schärfe bieten; denn der Betrag von μ^8 ist ziemlich genau gleich 10^{-9} oder gleich etwa 10^{-6} Bogensekunden; es ist dieselbe Grenze, die Herr Hill eingehalten, allerdings unter Vernachlässigung der parallaktischen Glieder. Übrigens kann man so scharf rechnen, wie man will; doch will ich in der vorliegenden Arbeit die genannte Grenze innehalten. Eine sehr genaue Kenntniss dieser Glieder nullten Grades ist nötig, um die Glieder höheren Grades scharf genug bestimmen zu können, also um bei unserer Methode die p- und q-Koeffizienten der Entwicklungen von P und Q scharf genug zu erhalten. Von den Gliedern ersten Grades erhalten nämlich einige einen Divisor von der Ordnung μ^2 und von denen zweiten Grades einige sogar einen solchen von der Ordnung μ^4; zwar sind diese letzteren noch mit den Quadraten von η und η' multiplizirt, aber dagegen sind auch die A- und B-, resp. die p- und q-Koeffizienten, welche zu den höheren Potenzen von μ^2 gehören, und welche analytisch von der nullten Ordnung, also nahe gleich Eins, sein sollten, zum Teil sehr gross; die grössten, welche ich berechnet habe, haben einen Betrag, der etwa gleich 200 ist, also sich mit μ^{-2} vergleichen lässt.

Ferner möchte ich Wert darauf legen, die Entwicklungen nach Potenzen von μ selbst ganz fallen zu lassen. Ich habe schon im vorigen streng unterschieden zwischen den Grössen μ und δ, obwohl sie sich nur um die Grössenordnung der Erdmasse (bezogen auf die Sonnenmasse), numerisch um 6 Einheiten der siebenten Dezimale, von einander unterscheiden. Die in den älteren Mondtheorien üblichen Entwicklungen nach Potenzen von μ (dort gewöhnlich mit m bezeichnet) sind eigentlich ein Gemisch von Entwicklungen nach Potenzen von μ^2 und δ, die Grösse μ selbst, welche übrigens die Wurzel aus der Sonnenmasse als Faktor enthält, kommt ihrer analytischen Bedeutung nach überhaupt nirgends vor. Wenn wir also vermeiden, diejenigen Funktionen von δ, welche

bei den Entwicklungen auftreten, und zwar meist als Integrationsdivisoren, nach Potenzen dieser Grösse zu entwickeln, so erhalten wir nur Entwicklungen nach Potenzen von μ^2, wozu ausser denen nach der Neigung dann noch die nach Potenzen von η, η', und α hinzutreten. Sicherlich tritt δ selbst auch als Integrationsdivisor auf, aber nur in solchen Gliedern, welche noch den Faktor α oder η enthalten, so dass sich in unsern Entwicklungen noch Potenzen von $\frac{\mu^2\alpha}{\delta}$ und $\frac{\mu^2\eta}{\delta}$ zeigen werden, die als solche der Grössen $\mu\alpha$ resp. $\mu\eta$ angesehen werden können. — Da in der Hill'schen periodischen Lösung die von α abhängigen Glieder fortgelassen sind, so würden wir diese Lösung durchaus nur als Potenzreihen nach μ^2 darstellen. Ich möchte aber dabei hervorhehen, dass Herr Hill in seiner eleganten Methode eigentlich auch nur solche Reihen nach μ^2 hat, dass er aber zur numerischen Berechnung der Koeffizienten $\delta = \mu$ setzt und die Konvergenz der Reihen erheblich durch eine sehr geschickte Transformation verstärkt, indem er Reihen nach $\frac{\mu}{1+\mu}$ einführt; trotz dieses Kunstgriffes scheint hierdurch eine genügend starke Konvergenz der Annäherungen noch nicht gewährleistet zu sein. Doch hätte es keine Schwierigkeiten, weiter zu transformiren, wie den Herren Hill und Brown wohl bewusst gewesen zu sein scheint.

Man ist sonach in der Mondtheorie, ebenso wie in der Theorie der Planeten, gezwungen, Reihen von mehr oder weniger schwacher Konvergenz einzuführen, wenn man die gesuchten Koeffizienten der Störungsglieder explizit als Funktionen der störenden Masse und der anderen Konstanten ausdrücken will. Eine solche Darstellung vermeide ich prinzipiell; es genügt ja auch vollkommen, wenn es gelungen ist, soviel Relationen zwischen den gesuchten Koeffizienten aufzustellen, wie solcher Koeffizienten bestimmt werden sollen; diese Relationen werden zuweilen Potenzreihen nach den Unbekannten selbst sein; wollte man aus diesen durch Umkehrung die Unbekannten explizit darstellen, so kann, selbst wenn die ursprünglichen Reihen sehr stark konvergirten, die Konvergenz der expliziten Reihen beliebig schwach, oder diese sogar divergent sein. Ich ziehe es vor, die implizite Reihe bei den Gliedern abzubrechen, welche klein genug sind, um vernachlässigt zu werden, und die übrig bleibenden algebraischen Relationen als Definition der Unbekannten anzusehen und durch Annäherungen zu lösen; welches die zu wählenden Wurzeln sind, kann niemals einem Zweifel unterliegen. Diese Annäherungen entsprechen sicherlich auch einer Potenzentwicklung, aber keiner solchen nach Potenzen der störenden Masse; sie können stets konvergent gemacht werden, auch wenn die Entwicklung nach der störenden Masse divergiren sollte.

Es scheint mir, als könne man diese Methode auch auf die Relationen anwenden, die Herr Hill für seine a-Koefficienten erhält; diese sind nur vom 2. Grade in den Unbekannten, und liessen sich durch Probiren gewiss ganz gut lösen, da Herr Hill aus den Differentialgleichungen das irrationale Glied mit

Hilfe des Jacobi'schen Integrals eliminirt. Ich habe dies Glied beibehalten und in eine Reihe entwickelt, weil diese Reihe sehr stark konvergirt und es so möglich wird, auch die Glieder höherer Grade durch einfache Weiterentwicklung nach demselben Schema zu erhalten. Dadurch scheint mir viel an Übersichtlichkeit gewonnen zu werden und der Leser wird im Stande sein, die Rechnungen Schritt für Schritt nachzuprüfen.

4. Wir gehen nun über zur Herstellung der Ausdrücke 51) aus 50). Diese Transformation besteht offenbar aus der Reduzirung von Reihen der Form

$$(1+S_0)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \{\mathfrak{B}_n^{(0)} + \mathfrak{B}_n^{(1)} R_0 + \mathfrak{B}_n^{(2)} R_0^2 + \mathfrak{B}_n^{(3)} R_0^3 + \cdots\} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x + nw - n\delta K_0),$$

in Reihen der Form

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{p}_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x + nw).$$

Im Argument habe ich hier die Grösse x zugefügt, um die Transformation gleich ganz allgemein zu halten, indem später für x jeder beliebige Wert eingesetzt werden kann; für die periodische Lösung ist x gleich Null zu setzen.

Wir bilden zunächst die Ausdrücke:

54)
$$\begin{aligned} (1+S_0)^2 &= 1 + \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \qquad (1+S_0)^2 R_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} e_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \\ (1+S_0)^2 R_0^2 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} e'_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \qquad (1+S_0)^2 R_0^3 = \sum_{-\infty}^{+\infty} e''_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \end{aligned}$$

und bezeichnen wieder mit Rücksicht auf die Grössenordnung:

n	$a'_{n\cdot 0\cdot 0}$	$e_{n\cdot 0\cdot 0}$	$e'_{n\cdot 0\cdot 0}$	$e''_{n\cdot 0\cdot 0}$
0	$a'_0\mu^2$	$e_0\mu^2$	$e'_0\mu^4$	$e''_0\mu^6$
± 1	$a'_1\mu^2\alpha$	$e_1\mu\alpha$	$e'_1\mu^3\alpha$	$e''_1\mu^5\alpha$
± 2	$a'_2\mu^2$	$e_2\mu^2$	$e'_2\mu^4$	$e''_2\mu^6$
± 3	$a'_3\mu^2\alpha$	$e_3\mu^2\alpha$	$e'_3\mu^3\alpha$	$e''_3\mu^5\alpha$
± 4	$a'_4\mu^4$	$e_4\mu^4$	$e'_4\mu^4$	$e''_4\mu^6$
± 5	$a'_5\mu^4\alpha$	$e_5\mu^4\alpha$	$e'_5\mu^4\alpha$	$e''_5\mu^5\alpha$
± 6	$a'_6\mu^6$	$e_6\mu^6$	$e'_6\mu^6$	$e''_6\mu^6$

Für diese Koeffizienten erhält man durch Ausmultiplikation der Reihen 47), wobei, wie in vorstehender Tabelle, die Grössen von der Ordnung μ^8 vernachlässigt sind, die folgenden Formeln; dabei habe ich in den Formeln für die a' die Glieder der Ordnung μ^8 in [ ] Klammern hinzugefügt, da wir sie weiter unten bei der Integration der Differentialgleichung für R (in den Relationen 79) bis zu dieser Genauigkeitsgrenze brauchen.

$$
\begin{aligned}
a_0' &= 2a_0 + (a_0^2 + 2a_2^2)\mu^2 && + [2a_2^2\mu^6 + 2(a_1^2 + a_3^2)\mu^2\alpha^2]\\
a_1' &= 2a_1 + 2(a_0a_1 + a_1a_2 + a_2a_3)\mu^2 && + [2a_3a_4\mu^4]\\
a_2' &= 2a_2 + 2a_0a_2\mu^2 + 2a_2a_4\mu^4 && + [(a_1^2 + 2a_1a_3)\mu^2\alpha^2]\\
a_3' &= 2a_3 + 2(a_0a_3 + a_1a_2)\mu^2 && + [2(a_1a_4 + a_2a_5)\mu^4]\\
55)\quad a_4' &= 2a_4 + a_2^2 + 2a_0a_4\mu^2 && + [2a_2a_6\mu^4 + 2a_1a_3\alpha^2]\\
a_5' &= 2a_5 + 2a_2a_3 && + [2(a_1a_4 + a_0a_5)\mu^2]\\
a_6' &= 2a_6 + 2a_2a_4 && + \left[2a_0a_6\mu^2 + a_3^2\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right]\\
[a_7' &= 2a_7 + 2(a_2a_5 + a_3a_4)]\\
[a_8' &= 2a_8 + a_4^2 + 2a_2a_6].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_0 &= b_0 + (a_0'b_0 + 2a_2'b_2)\mu^2 + 2a_1'b_1\mu\alpha^2\\
e_1 &= b_1 + (a_0'b_1 + a_2'b_1)\mu^2 + (a_1'b_0 + a_1'b_2 + a_2'b_3 + a_3'b_2)\mu^3\\
e_2 &= b_2 + (a_0'b_2 + a_2'b_0)\mu^2 + (a_1'b_1 + a_3'b_1)\mu\alpha^2 + (a_2'b_4 + a_4'b_2)\mu^4\\
e_3 &= b_3 + a_2'b_1\mu + (a_0'b_3 + a_3'b_0 + a_1'b_2)\mu^2 + a_4'b_1\mu^3\\
e_4 &= b_4 + a_2'b_2 + (a_0'b_4 + a_4'b_0)\mu^2 + a_3'b_1\frac{\alpha^2}{\mu}\\
e_5 &= b_5 + a_2'b_3 + a_3'b_2 + a_2'b_1\mu\\
e_6 &= b_6 + a_2'b_4 + a_4'b_2\\
e_0' &= e_0b_0 + 2e_2b_2 + 2e_1b_1\frac{\alpha^2}{\mu^2}\\
e_1' &= e_0b_1 + e_1b_0 + e_1b_2 + e_2b_1 + (e_2b_3 + e_3b_2)\mu\\
e_2' &= e_0b_2 + e_2b_0 + (e_2b_4 + e_4b_2)\mu^2 + e_1b_1\frac{\alpha^2}{\mu^2} + (e_1b_3 + e_3b_1)\frac{\alpha^2}{\mu}\\
56)\quad e_3' &= e_1b_2 + e_2b_1 + (e_0b_3 + e_3b_0)\mu + (e_1b_4 + e_4b_1)\mu^2\\
e_4' &= e_2b_2 + (e_0b_4 + e_4b_0)\mu^2 + (e_1b_3 + e_3b_1)\frac{\alpha^2}{\mu}\\
e_5' &= e_2b_3 + e_3b_2 + (e_1b_4 + e_4b_1)\mu\\
e_6' &= e_2b_4 + e_4b_2\\
e_0'' &= e_0'b_0 + 2e_2'b_2\\
e_1'' &= e_0'b_1 + e_1'b_0 + e_1'b_2 + e_2'b_1 + e_3'b_2\\
e_2'' &= e_0'b_2 + e_2'b_0 + e_4'b_2\\
e_3'' &= e_1'b_2 + e_2'b_1 + e_3'b_0 + e_4'b_1\\
e_4'' &= e_2'b_2 + e_4'b_0\\
e_5'' &= e_3'b_2 + e_4'b_1\\
e_6'' &= e_4'b_2.
\end{aligned}
$$

Weiter haben wir mit der einzuhaltenden Genauigkeit

$$\sin n\delta K_0 = n\delta K_0$$
$$\cos n\delta K_0 = 1 - \tfrac{1}{2} n^2 \delta^2 K_0^2.$$

Der erstere dieser Ausdrücke findet sich unmittelbar aus 47); der letztere wird:

$$\tfrac{1}{2}\delta^2 K_0^2 = c_2^2\mu^6 + 2c_1 c_2 \mu^5 \alpha \cos w - 2c_1 c_2 \mu^5 \alpha \cos 3w - c_2^2 \mu^6 \cos 4w.$$

Hiernach bezeichnen wir:

57)
$$(1+S_0)^2 \quad \sin n\delta K_0 = n \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} c'_{i\cdot 0\cdot 0} \sin iw$$
$$(1+S_0)^2 R_0 \sin n\delta K_0 = n \sum_{i=-\infty}^{i=\infty} c''_{i\cdot 0\cdot 0} \sin iw$$
$$(1+S_0)^2 R_0^2 \sin n\delta K_0 = n \sum_{i=-\infty}^{+\infty} c'''_{i\cdot 0\cdot 0} \sin iw$$
$$(1+S_0)^2 \quad \cos n\delta K_0 = 1 + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} a^{(n)}_{i\cdot 0\cdot 0} \cos iw$$

und setzen mit Rücksicht auf die Grössenordnung:

58)

i	$c'_{i\cdot 0\cdot 0}$	$c''_{i\cdot 0\cdot 0}$	$c'''_{i\cdot 0\cdot 0}$	$a^{(n)}_{i\cdot 0\cdot 0}$
0	0	0	0	$a^{(n)}_0 \mu^2$
± 1	$\pm c'_1 \mu^2 \alpha$	$\pm c''_1 \mu^4 \alpha$		$a^{(n)}_1 \mu^2 \alpha$
± 2	$\pm c'_2 \mu^3$	$\pm c''_2 \mu^5$	$\pm c'''_2 \mu^7$	$a^{(n)}_2 \mu^2$
± 3	$\pm c'_3 \mu^3 \alpha$	$\pm c''_3 \mu^4 \alpha$		$a^{(n)}_3 \mu^2 \alpha$
± 4	$\pm c'_4 \mu^5$	$\pm c''_4 \mu^5$	$\pm c'''_4 \mu^7$	$a^{(n)}_4 \mu^4$
± 5	$\pm c'_5 \mu^5 \alpha$	$\pm c''_5 \mu^5 \alpha$		$a^{(n)}_5 \mu^4 \alpha$
± 6	$\pm c'_6 \mu^7$	$\pm c''_6 \mu^7$	$\pm c'''_6 \mu^7$	$a^{(n)}_6 \mu^6$

wo:

59)
$$c'_1 = c_1 + (a'_0 c_1 - a'_2 c_1)\mu^2 + (a'_1 c_2 - a'_3 c_2 + a'_2 c_3)\mu^3$$
$$c'_2 = c_2 + a'_0 c_2 \mu^2 + (-a'_4 c_2 + a'_2 c_4)\mu^4$$
$$c'_3 = c_3 + a'_2 c_1 \mu + (a'_0 c_3 + a'_1 c_2)\mu^2$$
$$c'_4 = c_4 + a'_2 c_2 + a'_0 c_4 \mu^2$$
$$c'_5 = c_5 + a'_3 c_2 + a'_2 c_3$$
$$c'_6 = c_6 + a'_4 c_2 + a'_2 c_4$$
$$c''_1 = c'_1 b_0 + c'_3 b_1 - c'_1 b_2 + (c'_3 b_2 - c'_2 b_3)\mu$$
$$c''_2 = c'_2 b_0 + (c'_4 b_2 - c'_2 b_4)\mu^2 + c'_1 b_1 \frac{\alpha^2}{\mu^2}$$
$$c''_3 = c'_2 b_1 + c'_1 b_2 + c'_3 b_0 \mu$$
$$c''_4 = c'_2 b_2 + c'_4 b_0 \mu^2$$
$$c''_5 = c'_3 b_2 + c'_2 b_3$$
$$c''_6 = c'_4 b_2 + c'_2 b_4.$$

$$
\begin{aligned}
c_2''' &= c_2'' b_0 + c_4'' b_2 \\
c_4''' &= c_2'' b_2 + c_4'' b_0 \\
c_6''' &= c_4'' b_2 \\
a_0^{(n)} &= a_0' - n^2 c_2^2 \mu^4 \\
a_1^{(n)} &= a_1' - n^2 c_1 c_2 \mu^3 \\
a_2^{(n)} &= a_2' \\
a_3^{(n)} &= a_3' + n^2 c_1 c_2 \mu^3 \\
a_4^{(n)} &= a_4' + n^2 c_2^2 \mu^2 \\
a_5^{(n)} &= a_5' \\
a_6^{(n)} &= a_6',
\end{aligned}
\qquad 60)
$$

$a_2^{(n)}$, $a_5^{(n)}$, $a_6^{(n)}$ sind unabhängig von n innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenze. Weiter ist mit ausreichender Schärfe:

$$
\begin{aligned}
(1+S_0)^2 R_0 \cos n\delta K_0 &= (1+S_0)^2 R_0 \\
(1+S_0)^2 R_0^2 \cos n\delta K_0 &= (1+S_0)^2 R_0^2
\end{aligned}
$$

u. s. w.

5. Wir wollen nun die allgemeinen Ausdrücke:

$$
\begin{aligned}
&(1+S_0)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x + nw - n\delta K_0) \\
&(1+S_0)^2 R_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_n^{(1)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x + nw - n\delta K_0) \\
&(1+S_0)^2 R_0^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{B}_n^{(2)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x + nw - n\delta K_0)
\end{aligned}
\qquad 61)
$$

u. s. w.

in der angegebenen Weise entwickeln. Damit erreichen wir den Vorteil, dass sich aus den abgeleiteten Entwicklungen je nach dem Ausdruck, den man für die Koeffizienten $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{B}_n^{(1)}$, $\mathfrak{B}_n^{(2)}$ etc. und für das Argument x einsetzt, sofort die Entwicklung aller in P und Q vorkommenden Teile, wie z. B.:

$$
\begin{aligned}
&(1+S_0)^2 \{\alpha_{n\cdot 0\cdot 0} + \alpha_{n\cdot 0\cdot 0}^{(1)} R_0 + \cdots\} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n(w - \delta K_0) \\
&(1+S_0)^2 \{\alpha_{n\cdot 1\cdot 0} + \alpha_{n\cdot 1\cdot 0}^{(1)} R_0 + \cdots\} \eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\mathrm{v} + nw - n\delta K_0) \\
&(1+S_0)^2 \{\alpha_{n\cdot 0\cdot 0}^{(1)} + 2\alpha_{n\cdot 0\cdot 0}^{(2)} R_0 + \cdots\} R^{(1)} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n(w - \delta K_0)
\end{aligned}
$$

u. s. w.

ergeben. In den Ausdrücken 61) zerlegen wir:

$$
\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (x + nw - n\delta K_0) = \pm \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\delta K_0 \cos(x + nw) + \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\delta K_0 \sin(x + nw).
$$

Hiernach erhält man:

$$(1+S_0)^2\mathfrak{B}_n\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw-n\delta K_0) = (1+a_0^{(n)}\mu^2)\mathfrak{B}_n\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw)$$

$$+\mathfrak{B}_n\left\{\begin{array}{l}
(a_1^{(n)}-nc_1')\mu^2\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+1)w]+(a_1^{(n)}+nc_1')\mu^2\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-1)w]\\
+(a_2^{(n)}-nc_2'\mu)\mu^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+2)w]+(a_2^{(n)}+nc_2'\mu)\mu^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-2)w]\\
+(a_3^{(n)}-nc_3'\mu)\mu^2\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+3)w]+(a_3^{(n)}+nc_3'\mu)\mu^2\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-3)w]\\
+(a_4^{(n)}-nc_4'\mu)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+4)w]+(a_4^{(n)}+nc_4'\mu)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-4)w]\\
+(a_5^{(n)}-nc_5'\mu)\mu^4\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+5)w]+(a_5^{(n)}+nc_5'\mu)\mu^4\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-5)w]\\
+(a_6^{(n)}-nc_6'\mu)\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+6)w]+(a_6^{(n)}+nc_6'\mu)\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-6)w]
\end{array}\right\}$$

$$(1+S_0)^2\mathfrak{B}_n^{(1)}R_0\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw-n\delta K_0) = e_0\mu^2\mathfrak{B}_n^{(1)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw)$$

$$+\mathfrak{B}_n^{(1)}\left\{\begin{array}{l}
(e_1-nc_1''\mu^3)\mu\ \alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+1)w]+(e_1+nc_1''\mu^3)\mu\ \alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-1)w]\\
+(e_2-nc_2''\mu^3)\mu^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+2)w]+(e_2+nc_2''\mu^3)\mu^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-2)w]\\
+(e_3-nc_3''\mu^2)\mu^2\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+3)w]+(e_3+nc_3''\mu^2)\mu^2\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-3)w]\\
+(e_4-nc_4''\mu)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+4)w]+(e_4+nc_4''\mu)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-4)w]\\
+(e_5-nc_5''\mu)\mu^4\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+5)w]+(e_5+nc_5''\mu)\mu^4\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-5)w]\\
+(e_6-nc_6''\mu)\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+6)w]+(e_6+nc_6''\mu)\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-6)w]
\end{array}\right\}$$

$$(1+S_0)^2\mathfrak{B}_n^{(2)}R_0^2\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw-n\delta K_0) = e_0'\mu^4\mathfrak{B}_n^{(2)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw)$$

$$+\mathfrak{B}_n^{(2)}\left\{\begin{array}{l}
e_1'\mu^3\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+1)w]+e_1'\mu^3\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-1)w]\\
+(e_2'-nc_2'''\mu^3)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+2)w]+(e_2'+nc_2'''\mu^3)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-2)w]\\
+e_3'\mu^3\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+3)w]+e_3'\mu^3\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-3)w]\\
+(e_4'-nc_4'''\mu^3)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+4)w]+(e_4'+nc_4'''\mu^3)\mu^4\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-4)w]\\
+e_5'\mu^4\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+5)w]+e_5'\mu^4\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-5)w]\\
+(e_6'-nc_6'''\mu)\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+6)w]+(e_6'+nc_6'''\mu)\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-6)w]
\end{array}\right\}$$

$$(1+S_0)^2\mathfrak{B}_n^{(3)}R_0^3\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw-n\delta K_0) = e_0''\mu^6\mathfrak{B}_n^{(3)}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw)$$

$$+\mathfrak{B}_n^{(3)}\left\{\begin{array}{l} e_1''\mu^5\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+1)w]+e_1''\mu^5\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-1)w]\\ +e_2''\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+2)w]+e_2''\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-2)w]\\ +e_3''\mu^5\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+3)w]+e_3''\mu^5\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-3)w]\\ +e_4''\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+4)w]+e_4''\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-4)w]\\ +e_5''\mu^5\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+5)w]+e_5''\mu^5\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-5)w]\\ +e_6''\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n+6)w]+e_6''\mu^6\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[x+(n-6)w]\end{array}\right\}$$

6. Will man also allgemein eine Summe von der Form:

62) $$(1+S_0)^2\sum_{-\infty}^{+\infty}(\mathfrak{B}_n+\mathfrak{B}_n^{(1)}R_0+\mathfrak{B}_n^{(2)}R_0^2+\cdots)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw-n\delta K_0)$$

in die Form

63) $$\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathfrak{p}_n\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw)$$

überführen, so ist zu setzen:

64)
$$\begin{array}{ll}
\mathfrak{p}_n = f_{n.0}\mathfrak{B}_n & +g_{n.0}\mu^2\mathfrak{B}_n^{(1)}\\
+\mu^2\alpha(f_{n.1}\mathfrak{B}_{n-1}+f'_{n.1}\mathfrak{B}_{n+1}) & +\mu\ \alpha(g_{n.1}\mathfrak{B}_{n-1}^{(1)}+g'_{n.1}\mathfrak{B}_{n+1}^{(1)})\\
+\mu^2\ (f_{n.2}\mathfrak{B}_{n-2}+f''_{n.2}\mathfrak{B}_{n+2}) & +\mu^2\ (g_{n.2}\mathfrak{B}_{n-2}^{(1)}+g'_{n.2}\mathfrak{B}_{n+2}^{(1)})\\
+\mu^2\alpha(f_{n.3}\mathfrak{B}_{n-3}+f'_{n.3}\mathfrak{B}_{n+3}) & +\mu^2\alpha(g_{n.3}\mathfrak{B}_{n-3}^{(1)}+g'_{n.3}\mathfrak{B}_{n+3}^{(1)})\\
+\mu^4\ (f_{n.4}\mathfrak{B}_{n-4}+f''_{n.4}\mathfrak{B}_{n+4}) & +\mu^4\ (g_{n.4}\mathfrak{B}_{n-4}^{(1)}+g'_{n.4}\mathfrak{B}_{n+4}^{(1)})\\
+\mu^4\alpha(f_{n.5}\mathfrak{B}_{n-5}+f'_{n.5}\mathfrak{B}_{n+5}) & +\mu^4\alpha(g_{n.5}\mathfrak{B}_{n-5}^{(1)}+g'_{n.5}\mathfrak{B}_{n+5}^{(1)})\\
+\mu^6\ (f_{n.6}\mathfrak{B}_{n-6}+f'_{n.6}\mathfrak{B}_{n+6}) & +\mu^6\ (g_{n.6}\mathfrak{B}_{n-6}^{(1)}+g'_{n.6}\mathfrak{B}_{n+6}^{(1)})\\
+h_{n.0}\mu^4\mathfrak{B}_n^{(2)} & +k_0\mu^6\mathfrak{B}_n^{(3)}\\
+\mu^3\alpha(h_{n.1}\mathfrak{B}_{n-1}^{(2)}+h'_{n.1}\mathfrak{B}_{n+1}^{(2)}) & +\mu^5\alpha(k_1\mathfrak{B}_{n-1}^{(3)}+k'_1\mathfrak{B}_{n+1}^{(3)})\\
+\mu^4\ (h_{n.2}\mathfrak{B}_{n-2}^{(2)}+h'_{n.2}\mathfrak{B}_{n+2}^{(2)}) & +\mu^6\ (k_2\mathfrak{B}_{n-2}^{(3)}+k'_2\mathfrak{B}_{n+2}^{(3)})\\
+\mu^3\alpha(h_{n.3}\mathfrak{B}_{n-3}^{(2)}+h'_{n.3}\mathfrak{B}_{n+3}^{(2)}) & +\mu^5\alpha(k_3\mathfrak{B}_{n-3}^{(3)}+k'_3\mathfrak{B}_{n+3}^{(3)})\\
+\mu^4\ (h_{n.4}\mathfrak{B}_{n-4}^{(2)}+h'_{n.4}\mathfrak{B}_{n+4}^{(2)}) & +\mu^6\ (k_4\mathfrak{B}_{n-4}^{(3)}+k'_4\mathfrak{B}_{n+4}^{(3)})\\
+\mu^4\alpha(h_{n.5}\mathfrak{B}_{n-5}^{(2)}+h'_{n.5}\mathfrak{B}_{n+5}^{(2)}) & +\mu^5\alpha(k_5\mathfrak{B}_{n-5}^{(3)}+k'_5\mathfrak{B}_{n+5}^{(3)})\\
+\mu^6\ (h_{n.6}\mathfrak{B}_{n-6}^{(2)}+h'_{n.6}\mathfrak{B}_{n+6}^{(2)}) & +\mu^6\ (k_6\mathfrak{B}_{n-6}^{(3)}+k'_6\mathfrak{B}_{n+6}^{(3)}),
\end{array}$$

wo bezeichnet ist:

$$
\begin{array}{llll}
f_{n\cdot 0} = 1 + a_0^{(0)}\mu^2 & & & g_{n\cdot 0} = e_0 \\
f_{n\cdot 1} = a_1^{(n-1)} - (n-1)c_1' & f'_{n\cdot 1} = a_1^{(n+1)} + (n+1)c_1' & g_{n\cdot 1} = e_1 - (n-1)c_1''\mu^3 & g'_{n\cdot 1} = e_1 + (n+1)c_1''\mu^3 \\
f_{n\cdot 2} = a_2' - (n-2)c_2'\mu & f'_{n\cdot 2} = a_2' + (n+2)c_2'\mu & g_{n\cdot 2} = e_2 - (n-2)c_2''\mu^3 & g'_{n\cdot 2} = e_2 + (n+2)c_2''\mu^3 \\
f_{n\cdot 3} = a_3^{(n-3)} - (n-3)c_3'\mu & f'_{n\cdot 3} = a_3^{(n+3)} + (n+3)c_3'\mu & g_{n\cdot 3} = e_3 - (n-3)c_3''\mu^2 & g'_{n\cdot 3} = e_3 + (n+3)c_3''\mu^2 \\
f_{n\cdot 4} = a_4^{(n-4)} - (n-4)c_4'\mu & f'_{n\cdot 4} = a_4^{(n+4)} + (n+4)c_4'\mu & g_{n\cdot 4} = e_4 - (n-4)c_4''\mu & g'_{n\cdot 4} = e_4 + (n+4)c_4''\mu \\
f_{n\cdot 5} = a_5' - (n-5)c_5'\mu & f'_{n\cdot 5} = a_5' + (n+5)c_5'\mu & g_{n\cdot 5} = e_5 - (n-5)c_5''\mu & g'_{n\cdot 5} = e_5 + (n+5)c_5''\mu \\
f_{n\cdot 6} = a_6' - (n-6)c_6'\mu & f'_{n\cdot 6} = a_6' + (n+6)c_6'\mu & g_{n\cdot 6} = e_6 - (n-6)c_6''\mu & g'_{n\cdot 6} = e_6 + (n+6)c_6''\mu
\end{array}
$$

65)

$$
\begin{array}{lll}
h_{n\cdot 0} = e_0' & & k_0' = k_0 = e_0'' \\
h_{n\cdot 1} = e_1' & h'_{n\cdot 1} = e_1' & k_1 = k_1' = e_1'' \\
h_{n\cdot 2} = e_2' - (n-2)c_2'''\mu^3 & h'_{n\cdot 2} = e_2' + (n+2)c_2'''\mu^3 & k_2 = k_2' = e_2'' \\
h_{n\cdot 3} = e_3' & h'_{n\cdot 3} = e_3' & k_3 = k_3' = e_3'' \\
h_{n\cdot 4} = e_4' - (n-4)c_4'''\mu^3 & h'_{n\cdot 4} = e_4' + (n+4)c_4'''\mu^3 & k_4 = k_4' = e_4'' \\
h_{n\cdot 5} = e_5' & h'_{n\cdot 5} = e_5' & k_5 = k_5' = e_5'' \\
h_{n\cdot 6} = e_6' - (n-6)c_6'''\mu & h'_{n\cdot 6} = e_6' + (n+6)c_6'''\mu & k_6 = k_6' = e_6''.
\end{array}
$$

Die Koeffizienten $g_{n\cdot 0}, h_{n\cdot 0}, h_{n\cdot 1}, h_{n\cdot 3}, h_{n\cdot 5}, h'_{n\cdot 1}, h'_{n\cdot 3}, h'_{n\cdot 5}$ und die k und k' sind innerhalb der gesteckten Genauigkeitsgrenze unabhängig von dem Werte von n, und es ist:

$$
\begin{array}{lll}
f_{-n\cdot 0} = f_{n\cdot 0}; & f_{-n\cdot 1} = f'_{n\cdot 1}, & f_{-n\cdot 2} = f'_{n\cdot 2} \quad \text{u. s. w.} \\
g_{-n\cdot 0} = g_{n\cdot 0}; & g_{-n\cdot 1} = g'_{n\cdot 1}, & g_{-n\cdot 2} = g'_{n\cdot 2} \quad \text{u. s. w.} \\
h_{-n\cdot 0} = h_{n\cdot 0}; & h_{-n\cdot 1} = h'_{n\cdot 1}, & h_{-n\cdot 2} = h'_{n\cdot 2} \quad \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

Nach den vorstehenden Entwicklungen können die Ausdrücke $(1+S_0)^2 Q$ und $(1+S_0)^2 P$ unmittelbar transformirt werden und zwar bis zu beliebig hohen Potenzen von η und η' und der Neigung; da die an die Stelle der $\mathfrak{B}_n$ etc. tretenden Koeffizienten mindestens von der Ordnung μ^2 sind, so sind dabei nur die Glieder von der Ordnung μ^{10} vernachlässigt.

7. Es wird aber wünschenswert sein, zur Integration der Gleichung für S auch den Ausdruck $(1+S_0)^3 Q$ herzuleiten; es geschieht dies offenbar durch Multiplikation von Summen der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty} q_n \sin(x+nw)$ mit $1+S_0$. Sei hierzu allgemein:

66)
$$(1+S_0)\sum_{-\infty}^{+\infty} q_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw),$$

so findet man ohne weiteres

$$
\begin{aligned}
q'_n = (1+a_0\mu^2)q_n + a_1\mu^2\alpha(q_{n-1}+q_{n+1}) &\quad + a_4\mu^4\ (q_{n-4}+q_{n+4})\\
+ a_2\mu^2\ (q_{n-2}+q_{n+2}) &\quad + a_5\mu^4\alpha(q_{n-5}+q_{n+5})\\
+ a_3\mu^2\alpha(q_{n+3}+q_{n-3}) &\quad + a_6\mu^6\ (q_{n-6}+q_{n+6}).
\end{aligned}
\tag{67}
$$

Ferner wird in der Differentialgleichung für ϱ noch der Ausdruck $(1+S_0)^2 Q\,\frac{dR_0}{dv}$ und später analoge gebraucht, wozu die Multiplikation mit $\frac{dR_0}{dv}$ auszuführen ist. Man hat

$$
\frac{dR_0}{dv} = -2(1-\delta_2)\left\{\begin{array}{l} b_1\mu\ \alpha\sin w\ +2b_2\mu^2\ \sin 2w+3b_3\mu^2\alpha\sin 3w \\ +4b_4\mu^4\ \sin 4w+5b_5\mu^4\alpha\sin 5w+6b_6\mu^6\ \sin 6w \end{array}\right\}. \tag{68}
$$

Wenn man also setzt:

$$
\frac{dR_0}{dv}\sum_{-\infty}^{+\infty} q_n \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(x+nw) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{p}'_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw). \tag{69}
$$

so ist:

$$
\pm\mathfrak{p}'_n = (1-\delta_2)\left\{\begin{array}{l} b_1\mu\ \alpha(q_{n-1}-q_{n+1})+2b_2\mu^2\ (q_{n-2}-q_{n+2})+3b_3\mu^2\alpha(q_{n-3}-q_{n+3}) \\ +4b_4\mu^4\ (q_{n-4}-q_{n+4})+5b_5\mu^4\alpha(q_{n-5}-q_{n+5})+6b_6\mu^6\ (q_{n-6}-q_{n+6}) \end{array}\right\}. \tag{70}
$$

Wir wollen hier auch gleich noch die Formeln für die Division durch $1+S_0$ geben, da die Ausdrücke $(1+S_0)Q$ und $(1+S_0)P$ später gebraucht werden. Hier setzen wir:

$$
\frac{1}{1+S_0}\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{p}_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{p}''_n \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(x+nw) \tag{71}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+S_0} = 1-S_0+S_0^2-+\cdots = 1+a''_0\mu^2+2a''_1\mu^2\alpha\cos w\ +2a''_2\mu^2\ \cos 2w+2a''_3\mu^2\alpha\cos 3w\\
+2a''_4\mu^4\ \cos 4w+2a''_5\mu^4\alpha\cos 5w+2a''_6\mu^6\ \cos 6w.
\end{aligned}
\tag{72}
$$

Für die a''-Koeffizienten findet man:

$$
\begin{aligned}
a''_0 &= a'_0 - 3a_0 - \ a_0(a_0^2+6a_2^2)\mu^4\\
a''_1 &= a'_1 - 3a_1\\
a''_2 &= a'_2 - 3a_2 - 3a_2(a_0^2+a_2^2)\mu^4\\
a''_3 &= a'_3 - 3a_3\\
a''_4 &= a'_4 - 3a_4 - 3a_0a_2^2\mu^2\\
a''_5 &= a'_5 - 3a_5\\
a''_6 &= a'_6 - 3a_6 - a_2^3
\end{aligned}
\tag{73}
$$

und sodann:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{p}''_n = (1+a''_0\mu^2)\mathfrak{p}_n + a''_1\mu^2\alpha(\mathfrak{p}_{n-1}+\mathfrak{p}_{n+1}) &\quad + a''_4\mu^4\ (\mathfrak{p}_{n-4}+\mathfrak{p}_{n+4})\\
+ a''_2\mu^2\ (\mathfrak{p}_{n-2}+\mathfrak{p}_{n+2}) &\quad + a''_5\mu^4\alpha(\mathfrak{p}_{n-5}+\mathfrak{p}_{n+5})\\
+ a''_3\mu^2\alpha(\mathfrak{p}_{n-3}+\mathfrak{p}_{n+3}) &\quad + a''_6\mu^6\ (\mathfrak{p}_{n-6}+\mathfrak{p}_{n+6}).
\end{aligned}
\tag{74}
$$

IV. Kapitel.

Berechnung der periodischen Lösung nullten Grades.

1. Die Differentialgleichungen für die Funktionen S und R, soweit sie nullten Grades sind, erhält man, indem man in den Gleichungen 10) $\eta = 0$ setzt und für Q und P die Ausdrücke 51) nimmt. Die Gleichungen lauten dann:

$$
\begin{aligned}
-\frac{dS_0}{dv} &= (1+S_0)^2 Q_0 \\
\frac{d^2R_0}{dv^2} + R_0 &= -(1+S_0)^2 Q_0 \frac{dR_0}{dv} + 2S_0 + S_0^2 - (1+S_0)^2 P_0,
\end{aligned}
\tag{75}
$$

und wir lösen sie nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten, die wir allerdings speziell bei den Gliedern nullten Grades nur in impliziter Form ausführen wollen, wie schon Seite 39 bemerkt ist. Zunächst haben wir die Koeffizienten $q_{n\cdot 0\cdot 0}$ und $p_{n\cdot 0\cdot 0}$ der Ausdrücke 51) für P und Q abzuleiten nach den Vorschriften 62) bis 64), welche Entwicklung ich als Transformation 1 bezeichnen will. Man findet auf diese Weise die Formeln, die im Anhange in Tafel 1 gegeben sind; dabei habe ich wieder Bezeichnungen eingeführt, durch welche die Grössenordnung aller Glieder sofort ersichtlich wird, z. B. $q_{1\cdot 0\cdot 0} = q_{1\cdot 0}\mu^2\alpha$, $q_{2\cdot 0\cdot 0} = q_{2\cdot 0}\mu^2$ etc., wo $q_{1\cdot 0}$, $q_{3\cdot 0}$ etc. von der Grössenordnung der Einheit sind. Die Formeln für die $q_{n\cdot 0}$ sind nicht ausdrücklich hingeschrieben (mit Ausnahme von $q_{0\cdot 0}$, welches verschwindet), da sie den $p_{n\cdot 0}$ vollkommen analog sind; von dem Doppelzeichen $\pm$ gilt das obere für die p, das untere für die q; bei letzteren sind ausserdem statt der B die entsprechenden A zu setzen; $A_{0\cdot 0}$, $A_{0\cdot 1}$, $A_{0\cdot 2}$, $A_{0\cdot 3}$ sind gleich Null. Die rechten Seiten dieser Formeln schreiten in den von α unabhängigen Gliedern nach Potenzen von μ^2 fort, in den parallaktischen Gliedern aber nur nach solchen von μ. Vernachlässigt sind die Glieder der Ordnung μ^{10}, $\mu^7\alpha$, $\mu^5\alpha^2$, $\mu^3\alpha^3$. In den Koeffizienten $p_{1\cdot 0\cdot 0}$ und $q_{1\cdot 0\cdot 0}$ sind jedoch die Glieder der Ordnung $\mu^7\alpha$ berücksichtigt, da diese bei der Integration (welche das sogenannte parallaktische Störungsglied gibt) durch δ_2 dividirt werden.

Es sind nun die weiteren Ausdrücke zu entwickeln, die in 75) auftreten und die wir, wie folgt, bezeichnen:

76)
$$(1+S_0)^3 Q_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} q'_{n\cdot 0\cdot 0} \sin nw$$
$$(1+S_0)^2 Q_0 \frac{dR_0}{dv} = \sum_{-\infty}^{+\infty} p'_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw.$$

Ihre Ableitung will ich Transformation 2 und 3 nennen.

Die Formeln für $q'_{n\cdot 0\cdot 0}$ und $p'_{n\cdot 0\cdot 0}$ ergeben sich aus den Transformationen 66) bis 70), sie sind in Tafel 2 und 3 des Anhangs aufgenommen, und bis zu der gleichen Genauigkeitsgrenze berechnet, wie $q_{n\cdot 0\cdot 0}$ und $p_{n\cdot 0\cdot 0}$.

Der Einfachheit wegen setzen wir nun weiter:

77)
$$T = P + Q\frac{dR_0}{dv},$$

also für den nullten Grad

$$T_0 = P_0 + Q_0 \frac{dR_0}{dv}$$

und

78)
$$(1+S_0)^2 T_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} t_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw.$$

Es ist dann (Transformation 4)

$$t_{n\cdot 0\cdot 0} = p_{n\cdot 0\cdot 0} + p'_{n\cdot 0\cdot 0},$$

und zur Berechnung dieser Koeffizienten gelten die Formeln in Tafel 4.

2. Unsere Gleichungen 75) lauten jetzt folgendermassen:

79)
$$-\frac{dS_0}{dv} = \sum_{-\infty}^{+\infty} q'_{n\cdot 0\,0} \sin nw$$
$$\frac{d^2 R_0}{dv^2} + R_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (a'_{n\cdot 0\cdot 0} - t_{n\cdot 0\cdot 0}) \cos nw.$$

Zur Bildung der linken Seiten dieser Gleichungen haben wir die Ausdrücke 47) und 48); aus dem letzteren folgt:

$$\frac{d\cos nw}{dv} = -n(1-\delta_2)\sin nw$$
$$\frac{d^2 \cos nw}{dv^2} + \cos nw = [1 - n^2(1-\delta_2)^2]\cos nw.$$

Wir erhalten also folgende Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Koeffizienten $a_{n\cdot 0\cdot 0}$ und $b_{n\cdot 0\cdot 0}$:

80)
$$\begin{aligned} (1-\delta_2)a_1 &= q'_1 & 4(1-\delta_2)a_4 &= q'_4 \\ 2(1-\delta_2)a_2 &= q'_2 & 5(1-\delta_2)a_5 &= q'_5 \\ 3(1-\delta_2)a_3 &= q'_3 & 6(1-\delta_2)a_6 &= q'_6 \end{aligned}$$

81)
$$\begin{aligned} b_0 &= a'_0 - t_{0\cdot 0} & & \\ \frac{2\delta_2 - \delta_2^2}{\mu} b_1 &= a'_1 - t_{1\cdot 0} & [1-16(1-\delta_2)^2]b_4 &= a'_4 - t_{4\cdot 0} \\ [1-4(1-\delta_2)^2]b_2 &= a'_2 - t_{2\cdot 0} & [1-25(1-\delta_2)^2]b_5 &= a'_5 - t_{5\cdot 0} \\ [1-9(1-\delta_2)^2]b_3 &= a'_3 - t_{3\cdot 0} & [1-36(1-\delta_2)^2]b_6 &= a'_6 - t_{6\cdot 0}. \end{aligned}$$

a_0 ist als überzählige Integrationskonstante beliebig zu wählen; da wir aber das konstante Glied c_0 in $\frac{dW_0}{dv}$ zum Verschwinden bringen wollen, so ist es dieser Bedingung gemäss zu bestimmen.

3. Ehe wir an die Lösung der vorstehenden Gleichungen herangehen können, müssen wir in entsprechender Weise die Funktion $W_0 = K_0$ herstellen, d. h. die Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $c_{n\cdot 0\cdot 0}$ in 47) ableiten. Unsere Gleichung lautet hier nach 20):

$$82) \qquad \frac{dW_0}{dv} = \frac{1+S_0}{(1+R_0)^2} - 1,$$

und wenn wir ihre rechte Seite mit Vernachlässigung nur der Glieder von den Ordnungen μ^{10}, $\mu^7\alpha$ etc. bilden wollen, um W_0 selbst mit der gleichen Schärfe zu erhalten, so genügt der Genauigkeitsgrad nicht, mit dem wir oben z. B. die Ausdrücke 56) aufgestellt haben. Wir wollen hier gleich allgemein $\frac{1}{(1+R_0)^i}$ bis zu der vorgenannten Genauigkeitsgrenze entwickeln, obwohl wir hier diese Entwicklung nur für $i = 2$ brauchen. Bezeichnet man:

$$83) \qquad \begin{aligned} R_0^2 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} d_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \\ R_0^3 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} d'_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \\ R_0^4 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} d''_{n\cdot 0\cdot 0} \cos nw \end{aligned}$$

und, um wieder die Grössenordnung hervortreten zu lassen:

n	$d_{n\cdot 0\cdot 0}$	$d'_{n\cdot 0\cdot 0}$	$d''_{n\cdot 0\cdot 0}$
0	$d_0\mu^4$	$d'_0\mu^6$	$d''_0\mu^8$
±1	$d_1\mu^3\alpha$	$d'_1\mu^5\alpha$	
±2	$d_2\mu^4$	$d'_2\mu^6$	$d''_2\mu^8$
±3	$d_3\mu^3\alpha$	$d'_3\mu^5\alpha$	
±4	$d_4\mu^4$	$d'_4\mu^6$	$d''_4\mu^8$
±5	$d_5\mu^4\alpha$	$d'_5\mu^5\alpha$	
±6	$d_6\mu^6$	$d'_6\mu^6$	$d''_6\mu^8$
±7	$d_7\mu^6\alpha$	$d'_7\mu^6\alpha$	
±8	$d_8\mu^8$	$d'_8\mu^8$	$d''_8\mu^8$

so ergeben sich durch Ausmultiplikation die Formeln:

$$
\begin{aligned}
d &= b_0^2 + 2b_2^2 + 2b_1^2\frac{\alpha^2}{\mu^2} + 2b_4^2\mu^4 + 2b_3^2\alpha^2\\
d_1 &= 2b_0b_1 + 2b_1b_2 + 2b_2b_3\mu + 2b_3b_4\mu^3\\
d_2 &= 2b_0b_2 + 2b_2b_4\mu^2 + b_1^2\frac{\alpha^2}{\mu^2} + 2b_1b_3\frac{\alpha^2}{\mu}\\
d_3 &= 2b_1b_2 + 2b_0b_3\mu + 2b_1b_4\mu^2 + 2b_2b_5\mu^3\\
d_4 &= b_2^2 + 2b_0b_4\mu^2 + 2b_1b_3\frac{\alpha^2}{\mu} + 2b_2b_6\mu^4\\
d_5 &= 2b_2b_3 + 2b_1b_4\mu + 2b_0b_5\mu^2\\
d_6 &= 2b_2b_4 + 2b_0b_6\mu^2 + b_3^2\frac{\alpha^2}{\mu^2}\\
d_7 &= 2b_2b_5 + 2b_3b_4\\
d_8 &= 2b_3b_6 + b_4^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d_0' &= d_0b_0 + 2d_2b_2 + 2d_4b_4\mu^2 + 2d_1b_1\frac{\alpha^2}{\mu^2}\\
d_1' &= d_0b_1 + d_1b_0 + d_1b_2 + d_2b_1 + d_3b_2 + (d_2b_3 + d_5b_3)\mu\\
d_2' &= d_0b_2 + d_2b_0 + d_4b_3 + d_5b_4\mu^2 + (d_1b_1 + d_3b_1)\frac{\alpha^2}{\mu^2}\\
d_3' &= d_1b_2 + d_2b_1 + d_3b_0 + d_4b_1 + (d_0b_3 + d_5b_2)\mu\\
d_4' &= d_2b_2 + d_4b_0 + (d_0b_4 + d_6b_2)\mu^2 + d_2b_1\frac{\alpha^2}{\mu^2}\\
d_5' &= d_3b_2 + d_4b_1 + (d_2b_3 + d_5b_0)\mu\\
d_6' &= d_4b_2 + (d_2b_4 + d_6b_0)\mu^2\\
d_7' &= d_4b_3 + d_5b_2\\
d_8' &= d_4b_4 + d_6b_2\\
d_0'' &= d_0'b_0 + 2d_2'b_2\\
d_2'' &= d_0'b_2 + d_2'b_0 + d_4'b_2\\
d_4'' &= d_2'b_2 + d_4'b_0 + d_6'b_2\\
d_6'' &= d_4'b_2 + d_6'b_0\\
d_8'' &= d_6'b_2.
\end{aligned}
$$

84)

4. Sei nun

$$
\frac{1}{(1+R_0)^i} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_{n,i,0}\cos nw, \tag{85}
$$

so erhält man, indem man nach Potenzen von R_0 entwickelt und die vorstehenden Werte einsetzt, für die $r_{n,i,0}$ die in Tafel 5 gegebenen Relationen, und speziell für den vorliegenden Zweck ($i = 2$):

$$
\begin{aligned}
r_{0\cdot 2} &= -2b_0 + 3d_0\mu^2 - 4d_0'\mu^4 + 5d_0''\mu^6 \\
r_{1\cdot 2} &= -2b_1 + 3d_1\mu^2 - 4d_1'\mu^4 \\
r_{2\cdot 2} &= -2b_2 + 3d_2\mu^2 - 4d_2'\mu^4 + 5d_2''\mu^6 \\
r_{3\cdot 2} &= -2b_3 + 3d_3\mu - 4d_3'\mu^3 \\
r_{4\cdot 2} &= -2b_4 + 3d_4 - 4d_4'\mu^2 + 5d_4''\mu^4
\end{aligned}
\qquad 86)
$$

etc.

Wir haben nun $\frac{1+S_0}{(1+R_0)^2}$ zu bilden, wobei wir setzen:

$$\frac{1+S_0}{(1+R_0)^2} = 1 + \sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 2\cdot 0} \cos nw$$

oder gleich allgemein:

$$\frac{1+S_0}{(1+R_0)^i} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot i\cdot 0} \cos nw, \qquad 87)$$

womit wir für die $s_{n\cdot i\cdot 0}$ die in Tafel 6 gegebenen Relationen erhalten.

5. Es ist also

$$\frac{dW_0}{dv} = \sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 2\cdot 0} \cos nw$$

und, da

$$W_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_{n\cdot 0\cdot 0} \sin nw, \quad \frac{d \sin nw}{dv} = n(1-\delta_2)\cos nw,$$

so erhalten wir für die Koeffizienten der Funktion $W_0 = K_0$ folgende Bestimmungsgleichungen:

$$
\begin{aligned}
c_0 &= s_{0\cdot 2} = 0 \\
(1-\delta_2)c_1 &= s_{1\cdot 2} \qquad 4(1-\delta_2)c_4 = s_{4\cdot 2} \\
2(1-\delta_2)c_2 &= s_{2\cdot 2} \qquad 5(1-\delta_2)c_5 = s_{5\cdot 2} \\
3(1-\delta_2)c_3 &= s_{3\cdot 2} \qquad 6(1-\delta_2)c_6 = s_{6\cdot 2}
\end{aligned}
\qquad 88)
$$

etc.

6. Es handelt sich nun um die Auflösung der Gleichungen 80), 81) und 88), welche durch Annäherungen geschehen muss, da die rechten Seiten dieser Gleichungen die Unbekannten a_n, b_n, c_n implicite enthalten. Über die Methode zur Lösung dieser Gleichungen habe ich S. 39 gesprochen.

Wir stellen uns die Aufgabe, den Komplex der Gleichungen 80), 81), 88), 56), 86), 84), der Formeln in Tafel 1 bis 6, und der Relationen 65), 59), 55) zu lösen, indem wir die numerischen Werte der a_n, b_n, c_n suchen, welche sie innerhalb der durch das numerische Rechnen überhaupt gesteckten Grenze befriedigen. Die Vorzüge dieses Verfahrens liegen auf der Hand; man könnte aber meinen, dass seine Ausführung sich gar zu komplizirt gestalte; jedoch führt die Näherungsrechnung sehr schnell zum Ziel, wenn man etwa in der ersten Nähe-

rung die Grössen von der Ordnung μ^6 und $\mu^3\alpha$ vernachlässigt. Dann werden die Gleichungen, die in dieser ersten Näherung zu lösen sind, die folgenden:

Die Gleichungen 80) werden mit Rücksicht auf Tafel 2:

$$(1-\delta_2)a_1 = q_{1\cdot0} \qquad 3(1-\delta_2)a_3 = q_{3\cdot0}$$
$$2(1-\delta_2)a_2 = (1+a_0\mu^2)q_{2\cdot0} \qquad 4(1-\delta_2)a_4 = q_{4\cdot0} + a_2 q_{2\cdot0},$$

wo nach Tafel 1 und den Relationen 65), wenn man in die letzteren statt der e_n, e'_n, c'_n etc. die Grössen a_n, b_n, c_n einsetzt:

$$\begin{aligned} q_{1\cdot0} &= A_{1\cdot0} + b_1 A_{2\cdot1}\mu \\ q_{2\cdot0} &= (1+2a_0\mu^2)A_{2\cdot0} + b_0 A_{2\cdot1}\mu^2 \\ q_{3\cdot0} &= A_{3\cdot0} + b_1 A_{2\cdot1}\mu \\ q_{4\cdot0} &= 2a_2 A_{2\cdot0} + b_2 A_{2\cdot1} - 2c_2 A_{2\cdot0}\mu. \end{aligned}$$

Die Gleichungen 81) werden mit Rücksicht auf 56) und Tafel 4:

$$\begin{aligned} b_0 &= 2a_0 + (a_0^2 + 2a_2^2)\mu^2 - p_{0\cdot0} - p'_{0\cdot0}\mu^2 \\ (2-\delta_2)b_1 &= 2a_1 - p_{1\cdot0} - p'_{1\cdot0}\mu \\ [1-\ 4(1-\delta_2)^2]b_2 &= 2a_2 + 2a_0 a_2\mu^2 - p_{2\cdot0} \\ [1-\ 9(1-\delta_2)^2]b_3 &= 2a_3 - p_{3\cdot0} - p'_{3\cdot0}\mu \\ [1-16(1-\delta_2)^2]b_4 &= 2a_4 + a_2^2 - p_{4\cdot0} - p'_{4\cdot0}, \end{aligned}$$

wo nach Tafel 1 und 3:

$$\begin{aligned} p_{0\cdot0} &= (1+2a_0\mu^2)B_{0\cdot0} + 4a_2 B_{2\cdot0}\mu^2 + b_0 B_{0\cdot1}\mu^2 + 2b_2 B_{2\cdot1}\mu^2 + 4c_2 B_{2\cdot0}\mu^3 \\ p_{1\cdot0} &= B_{1\cdot0} + b_1(B_{0\cdot1} + B_{2\cdot1})\mu \\ p_{2\cdot0} &= (1+2a_0\mu^2)B_{2\cdot0} + 2a_2 B_{0\cdot0}\mu^2 + b_0 B_{2\cdot1}\mu^2 + b_2 B_{0\cdot1}\mu^2 \\ p_{3\cdot0} &= B_{3\cdot0} + b_1 B_{2\cdot1}\mu \\ p_{4\cdot0} &= 2a_2 B_{2\cdot0} + b_2 B_{2\cdot1} - 2c_2 B_{2\cdot0}\mu \\ p'_{0\cdot0} &= -4(1-\delta_2)b_2 q_{2\cdot0} = -4(1-\delta_2)b_2 A_{2\cdot0} \\ p'_{1\cdot0} &= -(1-\delta_2)b_1 q_{2\cdot0} = -(1-\delta_2)b_1 A_{2\cdot0} \\ p'_{3\cdot0} &= (1-\delta_2)b_1 q_{2\cdot0} = (1-\delta_2)b_1 A_{2\cdot0} \\ p'_{4\cdot0} &= 2(1-\delta_2)b_2 q_{2\cdot0} = 2(1-\delta_2)b_2 A_{2\cdot0}. \end{aligned}$$

In den Bestimmungsgleichungen für a_1 und b_1 habe ich hier nur $\mu^2\alpha$, in denen für a_3 und b_3 noch $\mu^3\alpha$ berücksichtigt.

Indem man im Vorstehenden die Werte der p- und q-Koeffizienten in die Gleichungen für die a_n und b_n einsetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} &89a) \quad (1-\delta_2)a_1 - A_{2\cdot1}b_1\mu = A_{1\cdot0} \\ &\quad b) \quad 2(1-\delta_2)a_2 = A_{2\cdot0} + (3a_0 A_{2\cdot0} + b_0 A_{2\cdot1})\mu^2 \\ &\quad c) \quad 3(1-\delta_2)a_3 = A_{3\cdot0} + b_1 A_{2\cdot1}\mu \\ &\quad d) \quad 4(1-\delta_2)a_4 = 3a_2 A_{2\cdot0} + b_2 A_{2\cdot1} - 2c_2 A_{2\cdot0}\mu. \end{aligned}$$

90a) $[2-\delta_2+(B_{0\cdot1}+B_{2\cdot1}-(1-\delta_2)A_{2\cdot0})\mu]b_1-2a_1 = -B_{1\cdot0}$

b) $[1-4(1-\delta_2)^2+B_{0\cdot1}\mu^2]b_2-2(1-B_{0\cdot0}\mu^2)a_2 = -B_{2\cdot0}$
$+(2a_0a_2-2a_0B_{2\cdot0}-b_0B_{2\cdot1})\mu^2$

c) $[1-9(1-\delta_2)^2]b_3-2a_3 = -B_{3\cdot0}-[(1-\delta_2)A_{2\cdot0}+B_{2\cdot1}]b_1\mu$

d) $[1-16(1-\delta_2)^2]b_4-2a_4 = a_2^2-2a_2B_{2\cdot0}-[2(1-\delta_2)A_{2\cdot0}+B_{2\cdot1}]b_2+2c_2B_{2\cdot0}\mu$

e) $(1+B_{0\cdot1}\mu^2)b_0-2(1-B_{0\cdot0}\mu^2)a_0 = -B_{0\cdot0}$
$+[a_0^2+2a_2^2-4a_2B_{2\cdot0}+(4(1-\delta_2)A_{2\cdot0}-2B_{2\cdot1})b_2]\mu^2-4c_2B_{2\cdot0}\mu^3.$

Hierzu treten die Gleichungen 88), welche mit Rücksicht auf 86), 84) und Tafel 6 sich, wie folgt, schreiben:

91a) $(1-\delta_2)c_1 = -2b_1+a_1\mu$

b) $2(1-\delta_2)c_2 = a_2-2(1+a_0\mu^2)b_2+(6b_0b_2-2b_0a_2)\mu^2$

c) $3(1-\delta_2)c_3 = a_3-2b_3+(6b_1b_2-2a_2b_1)\mu$

d) $4(1-\delta_2)c_4 = a_4-2b_4+3b_2^2-2a_2b_2$

e) $a_0-2b_0 = (2a_0b_0-3b_0^2-6b_2^2+4a_2b_2)\mu^2.$

Diese 14 Gleichungen liefern uns die erste Annäherung für die Koeffizienten a_0 bis a_4, b_0 bis b_4, c_1 bis c_4; auch sie werden am besten durch succcessive Näherung gelöst, indem man zuerst aus 90e) und 91e) genähert hat:

$$b_0-2a_0 = -B_{0\cdot0}$$
$$a_0-2b_0 = 0,$$

also

$$a_0 = \tfrac{2}{3}B_{0\cdot0}, \qquad b_0 = \tfrac{1}{3}B_{0\,0};$$

mit diesen Näherungswerten geht man dann in die Gleichungen 89b), 90b), 91b) ein und erhält genäherte Werte für a_2, b_2, c_2. Hierauf geben die vollständigen Gleichungen 90e) und 91e) genauere Werte für a_0 und b_0; dies Verfahren setzt man fort, bis a_0, a_2, b_0, b_2, c_2 bekannt sind; die übrigen Koeffizienten ergeben sich dann ohne Weiteres.

Mit Hilfe unserer numerischen Werte, Seite 34, fand sich:

$\log a_0 = 9{,}51721$	$\log b_0 = 9{,}24124$	
$-a_1 = 9{,}593_n$	$-b_1 = 9{,}897_n$	$\log c_1 = 0{,}224$
$-a_2 = 9{,}60850_n$	$-b_2 = 9{,}80758$	$-c_2 = 9{,}96009_n$
$-a_3 = 9{,}599_n$	$-b_3 = 9{,}451$	$-c_3 = 9{,}649_n$
$-a_4 = 9{,}869$	$-b_4 = 9{,}548_n$	$-c_4 = 9{,}937.$

7. Die Rechnung ist dann in der Weise fortzusetzen, dass man mit den vorstehenden Werten nach 55) und 56) a_0' bis a_4', e_0 bis e_4, e_0' bis e_4', e_0'' bis e_4''

und aus 59) und 60) c_1' bis c_4', c_1'' bis c_4'', c_2''' und c_4''' etc. berechnet. Sodann findet man aus 65) $f_{n\cdot 0}$ bis $f_{n\cdot 4}$, $f'_{n\cdot 1}$ bis $f'_{n\cdot 4}$ und die entsprechenden g, h, k; hieraus nach Tafel 1—4 $q_{1\cdot 0}$ bis $q_{4\cdot 0}$, $p_{0\cdot 0}$ bis $p_{4\cdot 0}$ und die entsprechenden q', p', t. Alsdann ergeben sich aus 80) wieder schärfere Werte für a_1 bis a_4 und aus 81) für b_1 bis b_4, bei welch letzteren aber die a'_n mit den letztgefundenen möglichst scharfen Werten von a_1 bis a_4 und nach den vollständigen Formeln 55) mit Einschluss der in [ ] Klammern stehenden Glieder zu rechnen sind.

Ferner rechnet man jetzt d_0, d'_0, d''_0; sodann $r_{0\cdot 0}$ und $s_{0\cdot 0}$, wobei aber in den letzten beiden Grössen für a_0 und b_0, soweit sie nicht mit μ^2 multiplizirt sind, nicht ihr obiger Näherungswert einzusetzen, sondern diese als unbekannte Grössen stehen zu lassen sind, so dass die Gleichung $s_0 = 0$ in eine Gleichung zwischen a_0 und b_0 übergeht; diese letztere kombinirt man mit der Gleichung 81): $b_0 = a'_0 - t_{0\cdot 0}$, indem man auch hier a_0, welches in a'_0 vorkommt, als unbekannt beibehält; diese beiden letztgenannten Gleichungen zwischen a_0 und b_0 löst man dann auf. Nun ergibt sich auch c_1 bis c_4.

Mit den so in der eben geschilderten zweiten Näherung gefundenen Werten der a, b, c wiederholt man die Rechnung in genau derselben Weise, bis alles stimmt, worauf man dann auch a_5, a_6, b_5, b_6, c_5, c_6 auf leicht ersichtlichem Wege erhält. Die kleineren Kunstgriffe, die sich beim Rechnen zur möglichst ökonomischen Ausführung von selbst darbieten, können hier natürlich nicht im Einzelnen aufgeführt werden.

Als definitive Werte fand ich die folgenden:

$\log a_0 = 9{,}5173502$	$\log b_0 = 9{,}2413557$	$c_0 = 0$
$-a_1 = 9{,}58715_n$	$-b_1 = 9{,}88604_n$	$\log c_1 = 0{,}20669$
$-a_2 = 9{,}6085490_n$	$-b_2 = 9{,}8076822$	$-c_2 = 9{,}9602336_n$
$-a_3 = 9{,}58699_n$	$-b_3 = 9{,}43633$	$-c_3 = 9{,}63342_n$
$-a_4 = 9{,}86905$	$-b_4 = 9{,}54658_n$	$-c_4 = 9{,}93640$
$-a_5 = 0{,}128$	$-b_5 = 9{,}662_n$	$-c_5 = 9{,}997$
$-a_6 = 0{,}161_n$	$-b_6 = 9{,}605$	$-c_6 = 0{,}062_n$.

Ihrer Wichtigkeit wegen gebe ich auch die folgenden Grössen an:

$\log a'_0 = 9{,}8199940$	
$-a'_1 = 9{,}88701_n$	$\log a'_4 = 0{,}21669$
$-a'_2 = 9{,}9103880_n$	$-a'_5 = 0{,}477$
$-a'_3 = 9{,}88786_n$	$-a'_6 = 0{,}545_n$;

$\log e_0 = 9{,}22819$	$\log e'_0 = 9{,}934$	$\log e''_0 = 9{,}63$
$- e_1 = 9{,}88599_n$	$- e'_1 = 0{,}09_n$	$- e''_1 = 0{,}39_n$
$- e_2 = 9{,}80877$	$- e'_2 = 9{,}337$	$- e''_2 = 9{,}93$
$- e_3 = 9{,}501$	$- e'_3 = 9{,}99_n$	$- e''_3 = 0{,}16_n$
$- e_4 = 9{,}942_n$	$- e'_4 = 9{,}616$	$- e''_4 = 9{,}33$
$- e_5 = 0{,}10_n$	$- e'_5 = 9{,}65$	$- e''_5 = 9{,}98_n$
$- e_6 = 0{,}24$	$- e'_6 = 9{,}90_n$	$- e''_6 = 9{,}42$;
$\log c'_1 = 0{,}210$	$\log c''_1 = 8{,}790_n$	$\log c'''_2 = 9{,}61_n$
$- c'_2 = 9{,}96182_n$	$- c''_2 = 9{,}196_n$	$- c'''_4 = 9{,}31_n$
$- c'_3 = 9{,}721_n$	$- c''_3 = 0{,}24$	$- c'''_6 = 9{,}58_n$.
$- c'_4 = 0{,}207$	$- c''_4 = 9{,}769_n$	
$- c'_5 = 0{,}31$	$- c''_5 = 9{,}77_n$	
$- c'_6 = 0{,}53_n$	$- c''_n = 0{,}13$	

n	$\log a_0^{(n)}$	$\log a_1^{(n)}$	$\log a_3^{(n)}$	$\log a_4^{(n)}$	
0	9,81999	$9{,}887_n$	$9{,}888_n$	0,217	
± 1	9,81997	$9{,}887_n$	$9{,}889_n$	0,217	$\log a_2^{(n)} = 9{,}91039_n$
± 2	9,81992	$9{,}886_n$	$9{,}890_n$	0,219	$- a_5^{(n)} = 0{,}477$
± 3	9,81984	$9{,}884_n$	$9{,}891_n$	0,222	$- a_6^{(n)} = 0{,}545_n$
± 4	9,81972	$9{,}882_n$	$9{,}894_n$	0,227	
± 5	9,81956	$9{,}879_n$	$9{,}897_n$	0,232	
± 6	9,81937	$9{,}875_n$	$9{,}900_n$	0,238	

Endlich gebe ich die Koeffizienten f, g, h, k, welche zur Berechnung der p und q nicht nur hier, sondern auch für die Glieder höherer Grade gebraucht werden.

n	$\log f_{n\cdot 0}$	$\log f_{n\cdot 1}$	$\log f_{n\cdot 2}$	$\log f_{n\cdot 3}$	$\log f_{n\cdot 4}$
0	0,0016025	9,931	$9{,}97797_n$	$0{,}953_n$	0,336
1	0,0016024	$9{,}887_n$	$9{,}94547_n$	$9{,}932_n$	0,307
2	0,0016022	$0{,}379_n$	$9{,}91035_n$	$9{,}910_n$	0,278
3	0,0016019	$0{,}604_n$	$9{,}87213_n$	$9{,}888_n$	0,248
4	0,0016015	$0{,}751_n$	$9{,}83022_n$	$9{,}866_n$	0,217
5	0,0016009	$0{,}861_n$	$9{,}78384_n$	$9{,}843_n$	0,185
6	0,0016002	$0{,}948_n$	$9{,}73189_n$	$9{,}820_n$	0,151
7					0,115

n	$\log f'_{n\cdot 1}$	$\log f'_{n\cdot 2}$
0	9,931	$9{,}97797_n$
1	0,394	$0{,}00820_n$
2	0,613	$0{,}03647_n$

n	$\log f_{n\cdot 5}$
3	0,52
5	0,48

n	$\log f_{n\cdot 6}$
4	$0{,}60_n$
6	$0{,}54_n$

n	$\log f''_{n\cdot 3}$
0	$9{,}953_n$
1	$9{,}973_n$

n	$\log g_{n\cdot 1}$	$\log g_{n\cdot 2}$	$\log g_{n\cdot 3}$	$\log g_{n\cdot 4}$
0	9,88598$_n$	9,80868	9,539	0,022$_n$
1	9,88597$_n$	9,80873	9,527	0,003$_n$
2	9,88596$_n$	9,80877	9,514	9,983$_n$
3	9,88594$_n$	9,80881	9,501	9,963$_n$
4	9,88593$_n$	9,80886	9,488	9,942$_n$
5	9,88593$_n$	9,80890	9,474	9,919$_n$
6		9,80895	9,459	9,896$_n$
7				9,871$_n$

$\log g_{n\cdot 0} = 9{,}22819$

n	$\log g'_{n\cdot 3}$
0	9,539
1	9,551

n	$\log g'_{n\cdot 1}$	$\log g'_{n\cdot 2}$
0	9,88598$_n$	9,80868
1	9,88600$_n$	9,80864
2	9,88601$_n$	9,80859
3	9,88604$_n$	

n	$\log g_{n\cdot 5}$
3	0,13$_n$
5	0,10$_n$

n	$\log g_{n\cdot 6}$
4	0,29
6	0,24

n	$\log h_{n\cdot 2}$	$\log h_{n\cdot 4}$
0	9,336	9,615
1	9,337	9,615
2	9,337	9,615
3	9,337	9,615
4	9,338	9,616
5	9,338	9,616
6	9,338	9,616
7		9,616

n	$\log h'_{n\cdot 2}$
0	9,336
1	9,336

n	$\log h_{n\cdot 6}$
4	9,93$_n$
6	9,90$_n$

$\log h_{n\cdot 0} = 9{,}934$
$-h_{n\cdot 1} = 0{,}09_n$
$-h_{n\cdot 3} = 9{,}99_n$
$-h_{n\cdot 5} = 9{,}65$
$-h'_{n\cdot 1} = 0{,}09_n$
$-h'_{n\cdot 3} = 9{,}99_n$

$\log k_0 = 9{,}63$
$-k_1 = 0{,}39_n$ $\quad \log k_4 = 9{,}33$
$-k_2 = 9{,}93$ $\quad -k_5 = 9{,}98_n$
$-k_3 = 0{,}16_n$ $\quad -k_6 = 9{,}42.$

Für negative n erinnern wir an die Formeln:

$$f_{-n\cdot 0} = f_{n\cdot 0}; \quad f_{-n\cdot 1} = f'_{n\cdot 1}; \quad f_{-n\cdot 2} = f'_{n\cdot 2} \text{ u. s. w.}$$
$$g_{-n\cdot 0} = g_{n\cdot 0}; \quad g_{-n\cdot 1} = g'_{n\cdot 1}; \quad g_{-n\cdot 2} = g'_{n\cdot 2} \text{ u. s. w.}$$
$$h_{-n\cdot 0} = h_{n\cdot 0}; \quad h_{-n\cdot 1} = h'_{n\cdot 1}; \quad h_{-n\cdot 2} = h'_{n\cdot 2} \text{ u. s. w.}$$

Für p, q, t ergaben sich folgende Werte:

n	$\log q_{n\cdot 0}$	$\log p_{n\cdot 0}$	$\log q'_{n\cdot 0}$	$\log p'_{n\cdot 0}$	$\log t_{n\cdot 0}$
0	$-\infty$	9,6779609	$-\infty$	0,25102	9,6869591
1	$9{,}55454_n$	9,86764	$9{,}55338_n$	$9{,}56255_n$	9,85124
2	$9{,}8750071_n$	9,8711522	$9{,}8758139_n$	$0{,}58777_n$	9,8710814
3	$0{,}03051_n$	0,00880	$0{,}03035_n$	9,70575	0,02467
4	0,38532	$0{,}28581_n$	0,43734	$9{,}94995_n$	$0{,}45060_n$
5	0,739	$0{,}644_n$	0,793	$0{,}295_n$	$0{,}804_n$
6	$0{,}812_n$	0,665	$0{,}906_n$	0,587	0,929

$$q_{-n\cdot 0} = -q_{n\cdot 0} \qquad p_{-n\cdot 0} = p_{n\cdot 0} \qquad t_{-n\cdot 0} = t_{n\cdot 0}$$
$$q'_{-n\cdot 0} = -q'_{n\cdot 0} \qquad p'_{-n\cdot 0} = p'_{n\cdot 0}.$$

Endlich geben wir die folgenden Koeffizienten:

$\log d_0 = 9{,}93280$	$\log d'_0 = 9{,}63856$	$\log d''_0 = 0{,}068$
$-d_1 = 0{,}08990_n$	$-d'_1 = 0{,}38904_n$	
$-d_2 = 9{,}34639$	$-d'_2 = 9{,}93185$	$-d''_2 = 9{,}748$
$d_3 = 9{,}99037_n$	$-d'_3 = 0{,}14974_n$	
$-d_4 = 9{,}61462$	$-d'_4 = 9{,}326$	$-d''_4 = 9{,}881$
$-d_5 = 9{,}591$	$-d'_5 = 9{,}971_n$	
$-d_6 = 9{,}654_n$	$-d'_6 = 9{,}422$	$-d''_6 = 9{,}255$

und die folgenden:

n	$\log r_{n\cdot 2}$	$\log s_{n\cdot 2}$
0	$9{,}5241633_n$	$-\infty$
1	0,18129	0,17292
2	$0{,}1074864_n$	$0{,}2274985_n$
3	$9{,}88272_n$	$0{,}07678_n$
4	0,28660	0,50469
5	0,374	0,662
6	$0{,}507_n$	$0{,}806_n$

Die Berechnung der Glieder nullten Grades ist hiermit abgeschlossen, und ich gebe nur noch die für die weitere Rechnung wichtigen Koeffizienten:

$\log a''_0 = 9{,}5141191_n$	$\log a''_4 = 9{,}75812_n$
$-a''_1 = 9{,}58947$	$-a''_5 = 0{,}012_n$
$-a''_2 = 9{,}6069376$	$-a''_6 = 9{,}959.$
$-a''_3 = 9{,}58732$	

V. Kapitel.

Die Glieder ersten Grades.

1. Ehe wir zur Integration der Differentialgleichungen für S_1 und R_1 übergehen, müssen wir eine Reihe von Ausdrücken entwickeln, die sich aus Q_1, P_1, S_0 und $\frac{dR_0}{dv}$ zusammensetzen. Die Herstellung dieser Ausdrücke erfolgt rein schematisch nach den Seite 40—46 gegebenen Regeln; die dazu nötigen Transformationen führen bei dem Genauigkeitsgrade, den wir anstreben, zu etwas umfangreichen Formeln, die ich nicht in den Text einfügen will, sondern wie beim nullten Grade, im Anhange zusammenstelle.

Die Differentialgleichung für S_1 lautet:

92) $$-\frac{dS_1}{dv} = [(1+S)^2 Q]_1,$$

die wir durch Teilung nach der Grössenordnung schreiben:

93) $$-\frac{dS_1}{dv} = (1+S_0)^3 Q_1 + 3(1+S_0)^2 Q_0 S_1.$$

Nach Gleichung 52) haben wir:

94) $$\begin{aligned}(1+S_0)^2 Q_1 = &\sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\,\sin(\mathrm{v}+nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \sin nw \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1+nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \cos nw,\end{aligned}$$

und diesen Ausdruck haben wir zunächst herzustellen; wir verbinden damit gleich die Herleitung der analogen Grösse

95) $$\begin{aligned}(1+S_0)^2 P_1 = &\sum_{-\infty}^{+\infty} p_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\,\cos(\mathrm{v}+nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \cos nw \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} p_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} p^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \sin nw.\end{aligned}$$

Wir wollen die Herleitung der vorstehenden Grössen als Transformation 5 bezeichnen und die dazu gehörigen Formeln in der Tafel 7 zusammenfassen.

2. Transformation 5. Ableitung der vorstehenden Ausdrücke aus den Gleichungen 38) und 40).

Wenn wir aus 38) und 40) die Glieder ersten Grades herausnehmen, so erhalten wir offenbar, wenn wir bedenken, dass $w_1 = w - \delta K_0 - \delta K_1$, und nach Potenzen von K_1 entwickeln:

$$
\begin{aligned}
Q_1 = &\sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \alpha_{n\cdot 1\cdot 0} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 1\cdot 0} R_0 + \alpha^{(2)}_{n\cdot 1\cdot 0} R_0^2 + \cdots \right\} \eta \ \sin(\mathrm{v} + nw - n\delta K_0) \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \alpha_{n\cdot 0\cdot 1} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 1} R_0 + \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 1} R_0^2 + \cdots \right\} \eta' \ \sin(\mathrm{v}_1 + nw - n\delta K_0) \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} + 2\alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 + 3\alpha^{(3)}_{n\cdot 0c0} R_0^2 + \cdots \right\} R_1 \sin(nw - n\delta K_0) \\
&\mp \sum_{-\infty}^{+\infty} n\delta \left\{ \alpha_{n\cdot 0\cdot 0} + \alpha^{(1)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0 + \alpha^{(2)}_{n\cdot 0\cdot 0} R_0^2 + \cdots \right\} K_1 \cos(nw - n\delta K_0),
\end{aligned}
\tag{96}
$$

und ganz analog für P_1; hier treten nur immer die β an Stelle der α, die Sinus an Stelle der Cosinus und umgekehrt, und von den $\mp$-Vorzeichen der letzten Summe gilt das obere für Q_1 und das untere für P_1.

Es sind die Koeffizienten $q_{n\cdot 1\cdot 0}$, $p_{n\cdot 1\cdot 0}$, $q_{n\cdot 0\cdot 1}$ u. s. w. der Ausdrücke 94) und 95) durch die α und β resp. die A und B (s. S. 28) auszudrücken, und dies geschieht ohne Weiteres nach den allgemeinen Vorschriften 62) bis 64). Die so entstehenden Formeln befinden sich in Tafel 7; in den Koeffizienten $q_{0\cdot 1\cdot 0}$, $p_{0\cdot 1\cdot 0}$, $q_{-1\cdot 1\cdot 0}$, $p_{-1\cdot 1\cdot 0}$, $q_{0\cdot 0\cdot 1}$, $p_{0\cdot 0\cdot 1}$, $q_{-1\cdot 0\cdot 1}$, $p_{-1\cdot 0\cdot 1}$ sind wegen der später auftretenden kleinen Divisoren nur die Grössenordnungen μ^{10}, $\mu^8\alpha$, $\mu^6\alpha^2$ etc., in $q_{-2\cdot 1\cdot 0}$, $p_{-2\cdot 1\cdot 0}$, $q_{-2\cdot 0\cdot 1}$, $p_{-2\cdot 0\cdot 1}$ sowie in allen $q^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}$, $p^{1\cdot 0}_{n\ 0\cdot 0}$, $q^{0\cdot 1}_{n\cdot(\cdot 0}$, $p^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}$ die Grössenordnungen μ^{10}, $\mu^7\alpha$, $\mu^5\alpha^2$ etc., in allen übrigen die Grössenordnungen μ^8, $\mu^6\alpha$ etc. vernachlässigt worden.

Die Formeln sind so aufgestellt, dass die Grössenordnung eines jeden Koeffizienten deutlich hervortritt und aus demselben Grunde sind die Koeffizienten $q_{n\cdot 1}$, $p_{n\cdot 1}$, $q_{n\cdot 2}$, $p_{n\cdot 2}$ etc. eingeführt, deren Bedeutung aus Tafel 7 sich unmittelbar ergibt; sie sind sämmtlich von der Ordnung der Einheit (nullter Ordnung in Bezug auf μ und α), aber zuweilen numerisch erheblich grösser.

Von den q-Koeffizienten sind nur $q_{0\cdot 1}$ und $q_{-1\cdot 2}$ angegeben, weil alle übrigen aus den Ausdrücken für die p sich ergeben, wenn man statt der B die A setzt; wo doppelte Vorzeichen angegeben sind, beziehen sich die oberen auf die p, die unteren auf die q.

3. Transformation 6. Wir haben nun $(1+S_0)^3 Q_1$ zu bilden, und setzen:

$$
\begin{aligned}
(1+S_0)^3 Q_1 = &\sum_{-\infty}^{+\infty} q'_{n\cdot 1\cdot 0} \eta \ \sin(\mathrm{v} + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} q'^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \sin nw \\
&+ \sum_{-\infty}^{+\infty} q'_{n\cdot 0\cdot 1} \eta' \sin(\mathrm{v}_1 + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} q'^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \cos nw.
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $q'_{n\cdot 1\cdot 0}$ u. s. w. aus $q_{n\cdot 1\cdot 0}$ u. s. w. erhalten wir nach 66) und 67) die in Tafel 8 gegebenen Formeln; die q'-Koeffizienten sind mit derselben Genauigkeit angegeben wie die entsprechenden q, und auch hier sind die Faktoren $q'_{n\cdot 1}$, $q'_{n\cdot 2}$ etc. eingeführt, wodurch die Grössenordnung der $q'_{n\cdot 1\cdot 0}$ etc. deutlich hervortritt.

4. Der Ausdruck $(1+S_0)^2 Q_0$, welcher in der Gleichung für S_1 vorkommt und selbst mit S_1 multiplizirt ist, ist schon aus Transformation 1, Seite 48, her bekannt.

5. Wir kommen nun zu den Transformationen, die wir für die Differentialgleichung für ϱ_1 brauchen. Wir wollen dort nach **77)** bezeichnen:

$$T = P + Q\frac{dR_0}{dv},$$

womit die genannte Gleichung die Form annimmt:

98) $$\frac{d^2\varrho_1}{dv^2} + \varrho_1 = 2S_1 - (1+S_0)^2 Q_0 \frac{d\varrho_1}{dv} - (1+S_0)^2 T_1 + 2\{S_0 - (1+S_0)T_0\}S_1.$$

6. Wir haben also die Grösse

99) $$(1+S_0)^2 T_1 = (1+S_0)^2 P_1 + (1+S_0)^2 Q_1 \frac{dR_0}{dv}.$$

zu entwickeln.

Den ersten Teil besitzen wir bereits aus Transformation 5; den zweiten haben wir aus $(1+S_0)^2 Q_1$ abzuleiten; es sei dies unsere Transformation 7:

100)
$$\begin{aligned}(1+S_0)^2 Q_1 \frac{dR_0}{dv} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} p'_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\,\cos(\mathrm{v} + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} p'^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \cos nw \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} p'_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1 + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} p'^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \sin nw.\end{aligned}$$

Nach der unter 70) gegebenen Regel finden sich die in Tafel 9 gegebenen Werte der Koeffizienten $p'_{n\cdot 1\cdot 0}$ u. s. w.

7. Transformation 8. Wir bezeichnen nun:

101)
$$\begin{aligned}(1+S_0)^2 T_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} t_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\,\cos(\mathrm{v} + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} t^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \cos nw \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} t_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1 + nw) + \sum_{-\infty}^{+\infty} t^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \sin nw.\end{aligned}$$

und erhalten nach dem vorigen:

102)
$$\begin{aligned} t_{n\cdot 1\cdot 0} &= p_{n\cdot 1\cdot 0} + p'_{n\cdot 1\cdot 0} & t^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} &= p^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} + p'^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} \\ t_{n\cdot 0\cdot 1} &= p_{n\cdot 0\cdot 1} + p'_{n\cdot 0\cdot 1} & t^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} &= p^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} + p'^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}.\end{aligned}$$

Tafel 10 gibt die Bezeichnungen, die wir für die t-Koeffizienten benutzen wollen und die Formeln zu ihrer speziellen Berechnung.

8. Transformation 9. Jetzt haben wir noch abzuleiten

$$(1+S_0)T_0.$$

Bei den Gliedern nullten Grades haben wir gefunden:

$$(1+S_0)^2 T_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} t_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw.$$

Hier bezeichnen wir

103) $$(1+S_0)\,T_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} t'_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw,$$

und erhalten nach 71) die Relationen der Tafel 11.

9. Transformation 10. Endlich wollen wir noch den Ausdruck

$$S_0-(1+S_0)\,T_0$$

abkürzend bezeichnen:

104) $$S_0-(1+S_0)\,T_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} l_{n\cdot 0\cdot 0}\cos nw,$$

und erhalten zur Berechnung der $l_{n\cdot 0\cdot 0}$ sofort die Formeln der Tafel 12.

Alle die in den vorstehenden Transformationen eingeführten Koeffizienten sind bekannt und lassen sich berechnen, da die periodische Lösung nullten Grades oben streng genug hergestellt ist.

10. Unsere beiden Differentialgleichungen haben wir nun auf die folgende einfache Form gebracht:

105)
$$-\frac{dS_1}{dv} = \sum_{-\infty}^{+\infty} q'_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\,\sin(\mathrm{v}+nw) + 2\sum_{1}^{\infty} q'^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1 \sin nw + 6\sum_{1}^{\infty} q_{n\cdot 0\cdot 0} S_1 \sin nw$$
$$+\sum_{-\infty}^{+\infty} q'_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1+nw) + 2\sum_{0}^{\infty}{}' q'^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \cos nw;$$

106)
$$\frac{d^2\varrho_1}{dv^2}+\varrho_1 = 2S_1 - \sum_{-\infty}^{+\infty} t_{n\cdot 1\cdot 0}\,\eta\,\cos(\mathrm{v}+nw) - 2\sum_{0}^{\infty}{}' t^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0} R_1\cos nw - 2\sum_{1}^{\infty} q_{n\cdot 0\cdot 0}\frac{d\varrho_1}{dv}\sin nw$$
$$-\sum_{-\infty}^{+\infty} t_{n\cdot 0\cdot 1}\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw) - 2\sum_{1}^{\infty} t^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0} K_1 \sin nw + 4\sum_{0}^{\infty}{}' l_{n\cdot 0\cdot 0} S_1\cos nw.$$

11. Die rechten Seiten dieser Gleichungen enthalten selbst die noch unbekannten Funktionen R_1, S_1, K_1. Durch einige Überlegung lässt sich aber die Form dieser Funktionen, sowie die Grössenordnung ihrer einzelnen Glieder, feststellen, so dass wir die formellen Ansätze schreiben können:

107)
$$\begin{aligned}
S_1 = {} & a_{-8\cdot 1}\mu^7\ \eta\cos(\mathrm{v}-8w) \\
& + a_{-7\cdot 1}\mu^5\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-7w) && + a_{-7\cdot 2}\mu^6\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1-7w) \\
& + a_{-6\cdot 1}\mu^5\ \eta\cos(\mathrm{v}-6w) && + a_{-6\cdot 2}\mu^4\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-6w) \\
& + a_{-5\cdot 1}\mu^3\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-5w) && + a_{-5\cdot 2}\mu^4\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1-5w) \\
& + a_{-4\cdot 1}\mu^3\ \eta\cos(\mathrm{v}-4w) && + a_{-4\cdot 2}\mu^2\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-4w) \\
& + a_{-3\cdot 1}\mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-3w) && + a_{-3\cdot 2}\mu^2\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1-3w) \\
& + a_{-2\cdot 1}\mu^2\ \eta\cos(\mathrm{v}-2w) && + a_{-2\cdot 2}\mu^2\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-2w) \\
& + a_{-1\cdot 1}\mu\ \alpha\eta\cos(\mathrm{v}-\ w) && + a_{-1\cdot 2}\mu^3\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1-\ w) \\
& + a_{0\cdot 1}\ \mu^3\ \eta\cos\mathrm{v} && + a_{0\cdot 2}\ \mu^2\alpha\eta'\cos\mathrm{v}_1 \\
& + a_{1\cdot 1}\ \mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}+\ w) && + a_{1\cdot 2}\ \mu^2\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1+\ w) \\
& + a_{2\cdot 1}\ \mu^2\ \eta\cos(\mathrm{v}+2w) && + a_{2\cdot 2}\ \mu^2\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1+2w) \\
& + a_{3\cdot 1}\ \mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}+3w) && + a_{3\cdot 2}\ \mu^4\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1+3w) \\
& + a_{4\cdot 1}\ \mu^4\ \eta\cos(\mathrm{v}+4w) && + a_{4\cdot 2}\ \mu^4\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1+4w) \\
& + a_{5\cdot 1}\ \mu^4\alpha\eta\cos(\mathrm{v}+5w) && + a_{5\cdot 2}\ \mu^6\ \eta'\cos(\mathrm{v}_1+5w). \\
& + a_{6\cdot 1}\ \mu^6\ \eta\cos(\mathrm{v}+6w)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
108)\quad R_1^{\prime\prime} = \; & b_{-8\cdot 1}\,\mu^7\;\eta\cos(\mathrm{v}-8w) \\
& + b_{-7\cdot 1}\,\mu^5\,\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}-7w) && + b_{-7\cdot 2}\,\mu^6\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1-7w) \\
& + b_{-6\cdot 1}\,\mu^5\;\eta\cos(\mathrm{v}-6w) && + b_{-6\cdot 2}\,\mu^4\,\alpha\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1-6w) \\
& + b_{-5\cdot 1}\,\mu^3\,\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}-5w) && + b_{-5\cdot 2}\,\mu^4\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1-5w) \\
& + b_{-4\cdot 1}\,\mu^3\;\eta\cos(\mathrm{v}-4w) && + b_{-4\cdot 2}\,\mu^2\,\alpha\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1-4w) \\
& + b_{-3\cdot 1}\,\mu^2\,\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}-3w) && + b_{-3\cdot 2}\,\mu^2\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1-3w) \\
& + b_{-2\cdot 1}\,\mu\;\eta\cos(\mathrm{v}-2w) && + b_{-2\cdot 2}\,\mu\;\alpha\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1-2w) \\
& + b_{-1\cdot 1}\,\mu\;\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}-w) && + b_{-1\cdot 2}\,\mu^2\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1-w) \\
& + b_{1\cdot 1}\;\mu^2\,\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}+w) && + b_{1\cdot 2}\;\mu^2\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1+w) \\
& + b_{2\cdot 1}\;\mu^2\;\eta\cos(\mathrm{v}+2w) && + b_{2\cdot 2}\;\mu^2\,\alpha\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1+2w) \\
& + b_{3\cdot 1}\;\mu^2\,\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}+3w) && + b_{3\cdot 2}\;\mu^4\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1+3w) \\
& + b_{3\cdot 1}\;\mu^4\;\eta\cos(\mathrm{v}+4w) && + b_{4\cdot 2}\;\mu^4\,\alpha\,\eta'\cos(\mathrm{v}_1+4w) \\
& + b_{5\cdot 1}\;\mu^4\,\alpha\,\eta\cos(\mathrm{v}+5w) && + b_{5\cdot 2}\;\mu^6\;\eta'\cos(\mathrm{v}_1+5w). \\
& + b_{6\cdot 1}\;\mu^6\;\eta\cos(\mathrm{v}+6w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
109)\quad K_1 = \; & c_{-8\cdot 1}\,\mu^7\;\eta\sin(\mathrm{v}-8w) \\
& + c_{-7\cdot 1}\,\mu^5\,\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}-7w) && + c_{-7\cdot 2}\,\mu^6\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1-7w) \\
& + c_{-6\cdot 1}\,\mu^5\;\eta\sin(\mathrm{v}-6w) && + c_{-6\cdot 2}\,\mu^4\,\alpha\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1-6w) \\
& + c_{-5\cdot 1}\,\mu^3\,\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}-5w) && + c_{-5\cdot 2}\,\mu^4\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1-5w) \\
& + c_{-4\cdot 1}\,\mu^3\;\eta\sin(\mathrm{v}-4w) && + c_{-4\cdot 2}\,\mu^2\,\alpha\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1-4w) \\
& + c_{-3\cdot 1}\,\mu^2\,\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}-3w) && + c_{-3\cdot 2}\,\mu^2\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1-3w) \\
& + c_{-2\cdot 1}\,\mu\;\eta\sin(\mathrm{v}-2w) && + c_{-2\cdot 2}\,\mu\;\alpha\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1-2w) \\
& + c_{-1\cdot 1}\;\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}-w) && + c_{-1\cdot 2}\,\mu\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1-w) \\
& + c_{0\cdot 1}\;\mu^2\;\eta\sin\mathrm{v} && + c_{0\cdot 2}\;\mu^2\,\alpha\,\eta'\sin\mathrm{v}_1 \\
& + c_{1\cdot 1}\;\mu\;\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}+w) && + c_{1\cdot 2}\;\mu^2\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1+w) \\
& + c_{2\cdot 1}\;\mu^2\;\eta\sin(\mathrm{v}+2w) && + c_{2\cdot 2}\;\mu^2\,\alpha\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1+2w) \\
& + c_{3\cdot 1}\;\mu^2\,\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}+3w) && + c_{3\cdot 2}\;\mu^4\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1+3w) \\
& + c_{4\cdot 1}\;\mu^4\;\eta\sin(\mathrm{v}+4w) && + c_{4\cdot 2}\;\mu^4\,\alpha\,\eta'\sin(\mathrm{v}_1+4w) \\
& + c_{5\cdot 1}\;\mu^4\,\alpha\,\eta\sin(\mathrm{v}+5w) && + c_{5\cdot 2}\;\mu^6\;\eta'\sin(\mathrm{v}_1+5w). \\
& + c_{6\cdot 1}\;\mu^6\;\eta\sin(\mathrm{v}+6w)
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten a, b, c sind hier noch unbekannt; wenn wir aber die vorstehenden Ausdrücke in die Differentialgleichungen einsetzen, so erhalten wir zu ihrer Bestimmung Gleichungen, welche zwar etwas komplizirt, aber sämmtlich

linear sind; ihre numerische Auflösung macht gar keine Schwierigkeit, wenn man näherungsweise vorgeht. Indessen muss noch die weiter unten zu behandelnde Gleichung für K_1 hinzugezogen werden.

12. Allerdings führt das Einsetzen der Werte von R_1, S_1, K_1 in obige Gleichungen auch zu ziemlich umfangreichen Entwicklungen; es wird überflüssig sein, das Resultat aller dieser Substitutionen in extenso hier anzuführen: es genügt, die Anführung einzelner weniger Ausdrücke ausführlich anzugeben, aus denen die übrigen sich ohne Schwierigkeit ablesen lassen. Ich wähle zunächst den Ausdruck $\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n,i,0} R_1 \cos nw$, welcher weiter unten gebraucht wird, und aus dem die Ausdrücke in Gl. 105)—106) ohne weiteres folgen. Man erhält, wenn man bei den Argumenten $\eta \cos \mathrm{v}$, $\eta' \cos \mathrm{v}_1$, $\eta \cos(\mathrm{v}-w)$, $\eta' \cos(\mathrm{v}_1 - w)$ die Glieder der Ordnung μ^{10}, $\mu^8\alpha$, $\mu^6\alpha^2$ etc., bei den Argumenten $\eta \cos(\mathrm{v}-2w)$ und $\eta' \cos(\mathrm{v}_1 - 2w)$ die der Ordnung μ^{10}, $\mu^7\alpha$, $\mu^5\alpha^2$ etc. und bei den übrigen die der Ordnung μ^8, $\mu^6\alpha$, $\mu^4\alpha^2$ etc. vernachlässigt, folgende Ausdrücke durch Ausmultiplikation:

110)
$$\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n,i,0} R_1 \cos nw =$$

$$\pm \{ \; s_{2,i} b_{-6,1} + s_{4,i} b_{-4,1} + s_{6,i} b_{-2,1} \} \mu^7 \quad \eta \cos(\mathrm{v} - 8w)$$

$$\pm \{ \; s_{2,i} b_{-5,1} + s_{3,i} b_{-4,1} + s_{5,i} b_{-2,1} \} \mu^5 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} - 7w)$$

$$+ \{ \pm s_{2,i} b_{-4,1} \pm s_{4,i} b_{-2,1} + s_{0,i} b_{-6,1} \mu^2 \} \mu^5 \eta \cos(\mathrm{v} - 6w)$$

$$+ \{ \pm s_{3,i} b_{-2,1} \pm (s_{1,i} b_{-4,1} + s_{2,i} b_{-3,1}) \mu + (s_{0,i} b_{-5,1} \pm s_{4,i} b_{-1,1}) \mu^2 \} \mu^3 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} - 5w)$$

$$+ \{ \pm s_{2,i} b_{-2,1} + s_{0,i} b_{-4,1} \mu^2 + (\pm s_{4,i} b_{0,1} + s_{2,i} b_{-6,1}) \mu^4 \pm (s_{1,i} b_{-3,1} + s_{3,i} b_{-1,1}) \alpha^2 \} \mu^3 \eta \cos(\mathrm{v} - 4w)$$

$$+ \{ \pm s_{1,i} b_{-2,1} \pm s_{2,i} b_{-1,1} \mu + (s_{0,i} b_{-3,1} + s_{1,i} b_{-4,1}) \mu^2 + (s_{2,i} b_{-5,1} \pm s_{3,i} b_{0,1}) \mu^3 \} \mu^2 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} - 3w)$$

$$+ \left\{ \; s_{0,i} b_{-2,1} + (s_{2,i} b_{-4,1} \pm s_{2,i} b_{0,1}) \mu^2 \pm s_{4,i} b_{2,1} \mu^3 \pm s_{1,i} b_{-1,1} \frac{\alpha^2}{\mu} + s_{1,i} b_{-3,1} \alpha^2 \pm s_{3,i} b_{1,1} \mu \alpha^2 + s_{4,i} b_{-6,1} \mu^6 \right\} \mu^3 \eta \cos(\mathrm{v} - 2w)$$

$$+ \{ \; s_{1,i} b_{-2,1} + s_{0,i} b_{-1,1} \mu + (s_{2,i} b_{-3,1} \pm s_{2,i} b_{1,1} \pm s_{1,i} b_{0,1} \pm s_{3,i} b_{2,1}) \mu^2 + s_{3,i} b_{-4,1} \mu^3 \pm s_{4,i} b_{3,1} \mu^4 + s_{4,i} b_{-5,1} \mu^5 \} \mu^2 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} - w)$$

$$+ \left\{ \; s_{2,i} b_{-2,1} \pm s_{2,i} b_{2,1} \mu + s_{0,i} b_{0,1} \mu^2 + s_{1,i} b_{-1,1} \frac{\alpha^2}{\mu} + s_{4,i} b_{-4,1} \mu^4 \pm s_{1,i} b_{1,1} \alpha^2 \pm s_{4,i} b_{4,1} \mu^5 + (s_{3,i} b_{-3,1} \pm s_{3,i} b_{3,1}) \mu \alpha^2 \right\} \mu^3 \eta \cos \mathrm{v}$$

$$+ \{ \pm s_{1,i} b_{2,1} + s_{2,i} b_{-1,1} + s_{3,i} b_{-2,1} + (s_{0,i} b_{1,1} + s_{1,i} b_{0,1} \pm s_{2,i} b_{3,1}) \mu \} \mu^3 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} + w)$$

$$+ \left\{ \; s_{0,i} b_{2,1} + (s_{2,i} b_{0,1} + s_{4,i} b_{-2,1}) \mu \pm s_{2,i} b_{4,1} \mu^2 + (s_{1,i} b_{1,1} \pm s_{1,i} b_{3,1} + s_{3,i} b_{-1,1}) \frac{\alpha^2}{\mu} \right\} \mu^4 \eta \cos(\mathrm{v} + 2w)$$

$$+ \{ \; s_{1,i} b_{2,1} + (s_{0,i} b_{3,1} + s_{2,i} b_{1,1}) \mu + (\pm s_{1,i} b_{4,1} + s_{3,i} b_{0,1} + s_{4,i} b_{-1,1} + s_{5,i} b_{-2,1}) \mu^2 \} \mu^3 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} + 3w)$$

$$+ \left\{ \; s_{2,i} b_{2,1} + s_{0,i} b_{4,1} \mu^2 + (s_{4,i} b_{0,1} + s_{6,i} b_{-2,1}) \mu^3 + s_{1,i} b_{3,1} \frac{\alpha^2}{\mu} \right\} \mu^4 \eta \cos(\mathrm{v} + 4w)$$

$$+ \{ \; s_{2,i} b_{3,1} + s_{3,i} b_{2,1} + s_{1,i} b_{4,1} \mu \} \mu^4 \alpha \eta \cos(\mathrm{v} + 5w)$$

$$+ \{ \; s_{2,i} b_{4,1} + s_{4,i} b_{2,1} \} \mu^6 \eta \cos(\mathrm{v} + 6w)$$

$$\pm\{\ s_{2,i}b_{-5,2}+s_{4,i}b_{-3,2}\}\mu^6\eta'\cos(\mathrm{v}_1-7w)$$

$$\pm\{\ s_{2,i}b_{-4,2}+s_{3,i}b_{-3,2}+(s_{1,i}b_{-5,2}+s_{4,i}b_{-2,2})\mu\}\mu^4\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-6w)$$

$$+\left\{\pm s_{2,i}b_{-3,2}+(s_{0,i}b_{-5,2}\pm s_{4,i}b_{-1,2})\mu^2\pm(s_{1,i}b_{-4,2}+s_{3,i}b_{-2,2})\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4\eta'\cos(\mathrm{v}_1-5w)$$

$$+\{\pm s_{1,i}b_{-3,2}\pm s_{2,i}b_{-2,2}+(s_{0,i}b_{-4,2}\pm s_{3,i}b_{-1,2})\mu+s_{1,i}b_{-5,2}\mu^2\}\mu^3\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-4w)$$

$$+\left\{\ s_{0,i}b_{-3,2}\pm s_{2,i}b_{-1,2}+(s_{2,i}b_{-5,2}\pm s_{4,i}b_{1,2})\mu^2\pm s_{1,i}b_{-2,2}\frac{\alpha^2}{\mu^2}+s_{1,i}b_{-4,2}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4\eta'\cos(\mathrm{v}_1-3w)$$

$$+\{\ s_{0,i}b_{-2,2}+s_{1,i}b_{-3,2}\pm s_{1,i}b_{-1,2}+(s_{2,i}b_{-4,2}\pm s_{3,i}b_{0,2}\pm s_{3,i}b_{1,2})\mu+(s_{3,i}b_{-5,2}\pm s_{4,i}b_{2,2})\mu^3\}\mu^3\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-2w)$$

$$+\left\{\ s_{0,i}b_{-1,2}+s_{2,i}b_{-3,2}\pm s_{2,i}b_{1,2}+s_{1,i}b_{-2,2}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\pm s_{1,i}b_{0,2}\frac{\alpha^2}{\mu}+(s_{4,i}b_{-5,2}\pm s_{4,i}b_{3,2})\mu^4+(s_{3,i}b_{-4,2}\pm s_{3,i}b_{2,2})\alpha^2\right\}\mu^4\eta'\cos(\mathrm{v}_1-w)$$

$$+\{\ s_{1,i}b_{-1,2}\pm s_{1,i}b_{1,2}+s_{2,i}b_{-2,2}+(s_{0,i}b_{0,2}\pm s_{2,i}b_{2,2}+s_{3,i}b_{-3,2})\mu+(\pm s_{3,i}b_{3,2}+s_{4,i}b_{-4,2})\mu^3\}\mu^3\alpha\eta'\cos\mathrm{v}_1$$

$$+\left\{\ s_{0,i}b_{1,2}+s_{2,i}b_{-1,2}+(\pm s_{2,i}b_{3,2}+s_{4,i}b_{-3,2})\mu^2+(s_{1,i}b_{0,2}\pm s_{1,i}b_{2,2}+s_{3,i}b_{-2,2})\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4\eta'\cos(\mathrm{v}_1+w)$$

$$+\{\ s_{1,i}b_{1,2}+(s_{0,i}b_{2,2}+s_{2,i}b_{0,2}+s_{3,i}b_{-1,2})\mu+(\pm s_{1,i}b_{3,2}+s_{4,i}b_{-2,2})\mu^2\}\mu^3\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1+2w)$$

$$+\left\{\ s_{2,i}b_{1,2}+(s_{0,i}b_{3,2}+s_{4,i}b_{-1,2})\mu^2+s_{1,i}b_{2,2}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4\eta'\cos(\mathrm{v}_1+3w)$$

$$+\{\ s_{2,i}b_{2,2}+s_{3,i}b_{1,2}+s_{1,i}b_{3,2}\mu\}\mu^4\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1+4w)$$

$$+\{\ s_{2,i}b_{3,2}+s_{4,i}b_{1,2}\}\mu^6\eta'\cos(\mathrm{v}_1+5w).$$

Die beiden Koeffizienten $b_{0,1}$ und $b_{0,2}$ sind gleich Null; dennoch habe ich sie in die vorstehende Entwicklung mit aufgenommen, wie wenn die Funktion R_1 ausser den oben gegebenen auch noch die beiden Glieder $b_{0,1}\mu^3\eta\cos\mathrm{v}$ und $b_{0,2}\mu^2\alpha\eta'\cos\mathrm{v}_1$ enthielte. Dies habe ich gethan, um der Entwicklung grössere Allgemeinheit zu geben, so dass sie auch auf die mit S_1 multiplizirten Summen angewandt werden kann. Sie wird so anwendbar auf alle vier mit R_1 und S_1 multiplizirten Ausdrücke in Gleichung 105) und 106), und zwar

auf $\sum_{-\infty}^{+\infty} t^{1,0}_{n,0,0} R_1\cos nw$, indem man $b_{0,1}$ und $b_{0,2}$ gleich Null macht, alle Glieder mit positivem Vorzeichen nimmt und die $s_{n,i}$ durch die $t_{n,3}$ ersetzt mit der Ausnahme, dass $t_{1,3}\mu$ an Stelle von $s_{1,i}$ tritt;

auf $\sum_{-\infty}^{+\infty} q^{1,0}_{n,0,0} R_1\sin nw$, indem man ausser $b_{0,1}$ und $b_{0,2}$ auch $s_{0,i}$ gleich Null macht, überall das untere Zeichen nimmt und die $s_{n,i}$ durch die $q'_{n,3}$ ersetzt mit der Ausnahme, dass $q'_{1,3}\mu$ an Stelle von $s_{1,i}$ tritt; alle cos sind ausserdem durch die sin zu ersetzen;

auf $\sum_{-\infty}^{+\infty} l_{n,0,0} S_1\cos nw$, indem man sämmtliche b-Koeffizienten durch die entsprechenden a-Koeffizienten ersetzt, mit der Ausnahme, dass $a_{-2,1}\mu$ statt $b_{-2,1}$, $a_{-2,2}\mu$ statt $b_{-2,2}$ und $a_{-1,2}\mu$ statt $b_{-1,2}$ zu nehmen ist, und endlich die $s_{n,i}$ durch die $l_{n,0}$ ersetzt, wieder mit der Ausnahme, dass $l_{1,0}\mu$ an Stelle von $s_{1,i}$ tritt; alle Vorzeichen sind positiv zu nehmen;

auf $\sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 0\cdot 0}\ S_1 \sin nw$, indem man, mit denselben Ausnahmen wie vorstehend, die b-Koeffizienten durch die a-Koeffizienten, und die $s_{n\cdot i}$ durch die $q_{n\cdot 0}$ (aber $s_{1\cdot i}$ durch $q_{1\cdot 0}\mu$) ersetzt, wobei $s_{0\cdot i}$ verschwindet, endlich die unteren Zeichen nimmt; alle cos sind durch die sin zu ersetzen.

13. Die mit K_1 multiplizirten Summen gebe ich besonders an, obwohl wir allenfalls diese in den vorstehenden Ausdruck hätten aufnehmen können; die Darstellung würde aber der andern Vorzeichen wegen zu unübersichtlich werden:

$$
\begin{aligned}
111)\quad & \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 0\cdot 0}^{10\cdot 1} K_1 \cos nw = \\
& \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-4\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{-2\cdot 1} \right\} \mu^6 \eta \sin(\mathrm{v} - 6w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{3\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + (q'_{2\cdot 4} c_{-3\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{-1\cdot 1})\mu \right\} \mu^4 \alpha \eta \sin(\mathrm{v} - 5w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{0\cdot 1} \mu^2 + q'_{3\cdot 4} c_{-1\cdot 1} \frac{\alpha^2}{\mu} \right\} \mu^4 \eta \sin(\mathrm{v} - 4w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-1\cdot 1} + q'_{1\cdot 4} c_{-2\cdot 1} \mu + q'_{3\cdot 4} c_{0\cdot 1} \mu^2 \right\} \mu^3 \alpha \eta \sin(\mathrm{v} - 3w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{0\cdot 1} + (q'_{0\cdot 4} c_{-2\cdot 1} \pm q'_{2\cdot 4} c_{-4\cdot 1})\mu + q'_{4\cdot 4} c_{2\cdot 1} \mu^2 + q'_{1\cdot 4} c_{-1\cdot 1} \frac{\alpha^2}{\mu^2} + q'_{3\cdot 4} c_{1\cdot 1} \frac{\alpha^2}{\mu} \right\} \mu^5 \eta \sin(\mathrm{v} - 2w) \\
+ & \left\{ \pm q'_{1\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + q'_{2\cdot 4} c_{1\cdot 1} + (q'_{0\cdot 4} c_{-1\cdot 1} + q'_{1\cdot 4} c_{0\cdot 1} \pm q'_{2\cdot 4} c_{-3\cdot 1} + q'_{3\cdot 4} c_{2\cdot 1})\mu \pm q'_{3\cdot 4} c_{-4\cdot 1} \mu^2 + q'_{4\cdot 4} c_{3\cdot 1} \mu^3 \right\} \mu^4 \alpha \eta \sin(\mathrm{v} - w) \\
+ & \left\{ \pm q'_{2\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{2\cdot 1} \mu + q'_{0\cdot 4} c_{0\cdot 1} \mu^3 \pm q'_{1\cdot 4} c_{-1\cdot 1} \frac{\alpha^2}{\mu} \pm q'_{4\cdot 4} c_{-4\cdot 1} \mu^4 + q'_{1\cdot 4} c_{1\cdot 1} \alpha^2 + q'_{4\cdot 4} c_{4\cdot 1} \mu^5 \right. \\
& \qquad \left. + (q'_{3\cdot 4} c_{3\cdot 1} \pm q'_{3\cdot 4} c_{-3\cdot 1})\mu\alpha^2 \right\} \mu^4 \eta \sin \mathrm{v} \\
+ & \left\{ \pm q'_{2\cdot 4} c_{-1\cdot 1} \pm q'_{3\cdot 4} c_{-2\cdot 1} \mu + (\pm q'_{1\cdot 4} c_{0\cdot 1} + q'_{1\cdot 4} c_{2\cdot 1} + q'_{2\cdot 4} c_{3\cdot 1})\mu^2 \right\} \mu^3 \alpha \eta \sin(\mathrm{v} + w) \\
+ & \left\{ \pm q'_{2\cdot 4} c_{0\cdot 1} \pm q'_{4\cdot 4} c_{-2\cdot 1} \mu + (q'_{0\cdot 4} c_{2\cdot 1} + q'_{2\cdot 4} c_{4\cdot 1})\mu^2 \pm q'_{3\cdot 4} c_{-1\cdot 1} \frac{\alpha^2}{\mu^2} \right\} \mu^5 \eta \sin(\mathrm{v} + 2w) \\
\pm & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{1\cdot 1} + (q'_{1\cdot 4} c_{2\cdot 1} + q'_{3\cdot 4} c_{0\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{-1\cdot 1})\mu \right\} \mu^4 \alpha \eta \sin(\mathrm{v} + 3w) \\
\pm & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{2\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{0\cdot 1} \mu^2 \right\} \mu^5 \eta \sin(\mathrm{v} + 4w) \\
\pm & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{3\cdot 1} + q'_{3\cdot 4} c_{2\cdot 1} \right\} \mu^5 \alpha \eta \sin(\mathrm{v} + 5w) \\
\pm & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{4\cdot 1} + q'_{4\cdot 4} c_{2\cdot 1} \right\} \mu^7 \eta \sin(\mathrm{v} + 6w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-5\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{-3\cdot 2} \right\} \mu^7 \eta' \sin(\mathrm{v}_1 - 7w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-4\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{-3\cdot 2} \right\} \mu^5 \alpha \eta' \sin(\mathrm{v}_1 - 6w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-3\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{-1\cdot 2} \mu \right\} \mu^5 \eta' \sin(\mathrm{v}_1 - 5w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-2\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{-1\cdot 2} + q'_{1\cdot 4} c_{-3\cdot 2} \mu \right\} \mu^4 \alpha \eta' \sin(\mathrm{v}_1 - 4w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{2\cdot 4} c_{-1\cdot 2} + (q'_{0\cdot 4} c_{-3\cdot 2} \pm q'_{2\cdot 4} c_{-5\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{1\cdot 2})\mu^3 \right\} \mu^4 \eta' \sin(\mathrm{v}_1 - 3w) \\
+ & \left\{ \quad q'_{1\cdot 4} c_{-1\cdot 2} + (\pm q'_{1\cdot 4} c_{-3\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{0\cdot 2} \pm q'_{2\cdot 4} c_{-4\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{1\cdot 2})\mu + q'_{0\cdot 4} c_{-2\cdot 2} \mu^2 + (\pm q'_{3\cdot 4} c_{-5\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{2\cdot 2})\mu^3 \right\} \mu^4 \alpha \eta' \sin(\mathrm{v}_1 - 2w)
\end{aligned}
$$

$$+\Big\{\; q'_{2.4}c_{1.2}\pm q'_{2.4}c_{-3.2}+q'_{0.4}c_{-1.2}\mu\pm q'_{1.4}c_{-2.2}\frac{\alpha^2}{\mu}+(q'_{4.4}c_{3.2}\pm q'_{4.4}c_{-5.2})\mu^4$$

$$+(q'_{1.4}c_{0.2}+q'_{3.4}c_{2.2}\pm q'_{3.4}c_{-4.2})\alpha^2\Big\}\mu^5\eta'\sin(\mathrm{v}_1-w)$$

$$+\big\{\pm q'_{1.4}c_{-1.2}\pm q'_{2.4}c_{-2.2}+(q'_{1.4}c_{1.2}+q'_{2.4}c_{2.2}\pm q'_{3.4}c_{-3.2})\mu+(q'_{0.4}c_{0.2}+q'_{3.4}c_{2.2}\pm q'_{4.4}c_{-4.2})\mu^3\big\}\mu^4\alpha\eta'\sin\mathrm{v}_1$$

$$+\big\{\pm q'_{2.4}c_{-1.2}+(q'_{0.4}c_{1.2}+q'_{2.4}c_{3.2}\pm q'_{4.4}c_{-3.2})\mu^3\big\}\mu^4\eta'\sin(\mathrm{v}_1+w)$$

$$\pm\big\{\; q'_{3.4}c_{-1.2}+(q'_{1.4}c_{1.2}+q'_{2.4}c_{0.2})\mu\big\}\mu^4\alpha\eta'\sin(\mathrm{v}_1+2w)$$

$$\pm\big\{\; q'_{2.4}c_{1.2}+q'_{4.4}c_{-1.2}\mu\big\}\mu^5\eta'\sin(\mathrm{v}_1+3w)$$

$$\pm\big\{\; q'_{2.4}c_{2.2}+q'_{3.4}c_{1.2}\big\}\mu^5\alpha\eta'\sin(\mathrm{v}_1+4w)$$

$$\pm\big\{\; q'_{2.4}c_{3.2}+q'_{4.4}c_{1.2}\big\}\mu^7\eta'\sin(\mathrm{v}_1+5w).$$

Der vorstehende Ausdruck ist anzuwenden

auf $\sum_{-\infty}^{+\infty} q'^{0.1}_{n.0.0}K_1\cos nw$, direkt, indem alle Glieder mit positivem Vorzeichen genommen werden;

auf $\sum_{-\infty}^{+\infty} t^{0.1}_{n.0.0}K_1\sin nw$, indem an Stelle der q'-Koeffizienten die entsprechenden t-Koeffizienten gesetzt werden, wobei indessen $t_{0.4}=0$ ist, indem ferner statt der sin die cos, und bei den mit doppeltem Vorzeichen versehenen Gliedern die negativen Zeichen genommen werden.

14. Es bleibt nun endlich die mit $\frac{d\varrho_1}{dv}$ multiplizirte Summe zu entwickeln; hierzu haben wir zunächst die Ausdrücke $\frac{d\eta\cos(\mathrm{v}+nw)}{dv}$ und $\frac{d\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw)}{dv}$ zu bilden, um dann $\frac{d\varrho_1}{dv}$ hinschreiben zu können.

Da nach Seite 14 und 36 (vgl. kl. Pl. Seite 20)

$$\mathrm{v}+nw=(1-\varsigma)v-\Pi_0+n(1-\delta_2)v-nB$$

war, so können wir offenbar schreiben

$$\frac{d\eta\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\mathrm{v}+nw)}{dv}=\mp[1-\varsigma+n(1-\delta_2)]\eta\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\mathrm{v}+nw)$$

$$+\frac{d\eta\cos\Pi_0}{dv}\cdot\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}[(1-\varsigma)v+nw]\pm\frac{d\eta\sin\Pi_0}{dv}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}[(1-\varsigma)v+nw]$$

und, da

$$\eta\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi_0=\varkappa\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Gamma+\varkappa_1\alpha\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\Gamma_1-\varsigma v),$$

so wird:

112)
$$\frac{d\eta\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Pi_0}{dv}=\pm\varsigma\varkappa_1\alpha\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(\Gamma_1-\varsigma v)$$

und hiermit

$$113) \qquad \frac{d\eta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(v+nw)}{dv} = \mp D_n \eta \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(v+nw) \mp \varsigma \varkappa_1 \alpha \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(v_1+nw),$$

wo wir

$$114) \qquad D_n = 1-\varsigma+n(1-\delta_2)$$

der Kürze halber bezeichnen.

Ferner haben wir einfach, da wir η' und Π' als Konstanten ansehen wollen:

$$115) \qquad \frac{d\eta' \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(v_1+nw)}{dv} = \mp D'_n \eta' \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(v_1+nw),$$

wo

$$116) \qquad D'_n = 1+n(1-\delta_2)$$

bezeichnet ist.

Da nun

$$\varrho_1 = \eta \cos v + R_1$$

ist, so erhalten wir folgenden Ausdruck, wenn wir alle Glieder der Ordnung μ^3 fortlassen und dabei ς als von der Ordnung μ^2 ansehen, sowie

$$117) \qquad \mathfrak{c} = \frac{\varkappa_1}{\eta'}$$

bezeichnen:

$$\begin{aligned}
118) \quad -\frac{d\varrho_1}{dv} = {} & D_{-8} b_{-8,1} \mu^7 \quad \eta \sin(v-8w) \\
& + D_{-7} b_{-7,1} \mu^5 \alpha \eta \sin(v-7w) \quad + D'_{-7} b_{-7,2} \mu^6 \quad \eta' \sin(v_1-7w) \\
& + D_{-6} b_{-6,1} \mu^5 \quad \eta \sin(v-6w) \quad + D'_{-6} b_{-6,2} \mu^4 \alpha \eta' \sin(v_1-6w) \\
& + D_{-5} b_{-5,1} \mu^3 \alpha \eta \sin(v-5w) \quad + D'_{-5} b_{-5,2} \mu^4 \quad \eta' \sin(v_1-5w) \\
& + D_{-4} b_{-4,1} \mu^3 \quad \eta \sin(v-4w) \quad + (D'_{-4} b_{-4,2} + b_{-4,1} \mathfrak{c} \varsigma \mu) \mu^2 \alpha \eta' \sin(v_1-4w) \\
& + D_{-3} b_{-3,1} \mu^2 \alpha \eta \sin(v-3w) \quad + D'_{-3} b_{-3,2} \mu^2 \eta' \sin(v_1-3w) \\
& + D_{-2} b_{-2,1} \mu \quad \eta \sin(v-2w) \quad + (D'_{-2} b_{-2,2} + b_{-2,1} \mathfrak{c} \varsigma) \mu \alpha \eta' \sin(v_1-2w) \\
& + \frac{\delta_2-\varsigma}{\mu} b_{-1,1} \mu^3 \alpha \eta \sin(v-w) \quad + \left(\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1,2} + b_{-1,1} \mathfrak{c} \varsigma \frac{\alpha^2}{\mu^2}\right) \mu^3 \eta' \sin(v_1-w) \\
& + (1-\varsigma) \quad \eta \sin v \quad + \mathfrak{c} \varsigma \alpha \quad \eta' \sin v_1 \\
& + D_1 b_{1,1} \mu^2 \alpha \eta \sin(v+w) \quad + D'_1 b_{1,2} \mu^2 \eta' \sin(v_1+w) \\
& + D_2 b_{2,1} \mu^2 \quad \eta \sin(v+2w) \quad + (D'_2 b_{2,2} + b_{2,1} \mathfrak{c} \varsigma) \mu^2 \alpha \eta' \sin(v_1+2w) \\
& + D_3 b_{3,1} \mu^2 \alpha \eta \sin(v+3w) \quad + D'_3 b_{3,2} \mu^4 \quad \eta' \sin(v_1+3w) \\
& + D_4 b_{4,1} \mu^4 \quad \eta \sin(v+4w) \quad + D'_4 b_{4,2} \mu^4 \alpha \eta' \sin(v_1+4w) \\
& + D_5 b_{5,1} \mu^4 \alpha \eta \sin(v+5w) \quad + D'_5 b_{5,2} \mu^6 \quad \eta' \sin(v_1+5w). \\
& + D_6 b_{6,1} \mu^6 \quad \eta \sin(v+6w)
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplikation mit diesem Ausdruck erhalten wir endlich die Entwicklung:

$$
\begin{aligned}
119)\quad & \sum_{-\infty}^{+\infty} q_{n\cdot 0\cdot 0}\frac{dQ_1}{dv}\sin nw = \\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D_{-5}b_{-6\cdot 1}+q_{4\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}+q_{6\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\right\}\mu^7\eta\cos(\mathrm{v}-8w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D_{-5}b_{-5\cdot 1}+q_{3\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}+q_{5\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\right\}\mu^5\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-7w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}+q_{4\cdot 0}D_{-2}b_{-3\cdot 1}+q_{6\cdot 0}(1-\varsigma)\mu\right\}\mu^5\eta\cos(\mathrm{v}-6w)\\
& -\left\{q_{3\cdot 0}D_{-3}b_{-2\cdot 1}+(q_{2\cdot 0}D_{-3}b_{-3\cdot 1}+q_{5\cdot 0}(1-\varsigma))\mu+q_{1\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}\mu^2\right\}\mu^3\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-5w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}+q_{4\cdot 0}(1-\varsigma)\mu-q_{3\cdot 0}D_{-6}b_{-6\cdot 1}\mu^4\right\}\mu^3\eta\cos(\mathrm{v}-4w)\\
& -\left\{q_{3\cdot 0}(1-\varsigma)+q_{1\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\mu+q_{3\cdot 0}\frac{D_{-1}}{\mu}b_{-1\cdot 1}\mu^2\right.\\
& \qquad\left.-(q_{1\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}+q_{2\cdot 0}D_{-5}b_{-5\cdot 1})\mu^3\right\}\mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-3w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}(1-\varsigma)-q_{2\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}\mu^3+q_{4\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}\mu^4\right.\\
& \qquad\left.+\left(q_{1\cdot 0}\frac{D_{-1}}{\mu}b_{-1\cdot 1}-q_{1\cdot 0}D_{-3}b_{-3\cdot 1}+q_{3\cdot 0}D_1b_{1\cdot 1}\right)\mu^2\alpha^2\right\}\mu^2\eta\cos(\mathrm{v}-2w)\\
& -\left\{q_{1\cdot 0}(1-\varsigma)-q_{1\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\mu+(q_{2\cdot 0}D_1b_{1\cdot 1}-q_{2\cdot 0}D_{-3}b_{-3\cdot 1}+q_{3\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1})\mu^2\right.\\
& \qquad\left.-q_{3\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}\mu^3+q_{4\cdot 0}D_3b_{3\cdot 1}\mu^4-q_{4\cdot 0}D_{-5}b_{-5\cdot 1}\mu^5\right\}\mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}-w)\\
& +\left\{q_{2\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}-q_{2\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}\mu+q_{4\cdot 0}D_{-4}b_{-4\cdot 1}\mu^4-q_{4\cdot 0}D_4b_{4\cdot 1}\mu^5\right.\\
& \qquad\left.+\left(q_{1\cdot 0}\frac{D_{-1}}{\mu}b_{-1\cdot 1}-q_{1\cdot 0}D_1b_{1\cdot 1}+q_{3\cdot 0}D_{-3}b_{-3\cdot 1}-q_{3\cdot 0}D_3b_{3\cdot 1}\right)\mu\alpha^2\right\}\mu^3\eta\cos\mathrm{v}\\
& +\left\{q_{1\cdot 0}(1-\varsigma)+q_{3\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\mu\right.\\
& \qquad\left.-\left(q_{1\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}-q_{2\cdot 0}\frac{D_{-1}}{\mu}b_{-1\cdot 1}+q_{2\cdot 0}D_3b_{3\cdot 1}\right)\mu^2\right\}\mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}+w)\\
& +\left\{q_{2\cdot 0}(1-\varsigma)+q_{4\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\mu^3-q_{2\cdot 0}D_4b_{4\cdot 1}\mu^4\right\}\mu^2\eta\cos(\mathrm{v}+2w)\\
& +\left\{q_{3\cdot 0}(1-\varsigma)+(q_{1\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}+q_{2\cdot 0}D_1b_{1\cdot 1})\mu^2+q_{5\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\mu^3\right\}\mu^2\alpha\eta\cos(\mathrm{v}+3w)\\
& +\left\{q_{4\cdot 0}(1-\varsigma)+q_{2\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}+q_{6\cdot 0}D_{-2}b_{-2\cdot 1}\mu^3\right\}\mu^4\eta\cos(\mathrm{v}+4w)\\
& +\left\{q_{5\cdot 0}(1-\varsigma)+q_{2\cdot 0}D_3b_{3\cdot 1}+q_{3\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}\right\}\mu^4\alpha\eta\cos(\mathrm{v}+5w)\\
& +\left\{q_{6\cdot 0}(1-\varsigma)+q_{3\cdot 0}D_4b_{4\cdot 1}+q_{4\cdot 0}D_2b_{2\cdot 1}\right\}\mu^6\eta\cos(\mathrm{v}+6w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D'_{-5}b_{-5\cdot 2}+q_{4\cdot 0}D'_{-3}b_{-3\cdot 2}\right\}\mu^6\eta'\cos(\mathrm{v}_1-7w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D'_{-4}b_{-4\cdot 2}+q_{3\cdot 0}D'_{-3}b_{-3\cdot 2}+q_{4\cdot 0}D'_{-2}b_{-2\cdot 2}\mu\right\}\mu^4\alpha\eta'\cos(\mathrm{v}_1-6w)\\
& -\left\{q_{2\cdot 0}D'_{-3}b_{-3\cdot 2}+q_{4\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1\cdot 2}\mu^3+q_{3\cdot 0}D'_{-2}b_{-2\cdot 2}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4\eta'\cos(\mathrm{v}_1-5w)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\Big\{ \quad q_{2\cdot 0} D'_{-2} b_{-2\cdot 2} + q_{1\cdot 0} D'_{-3} b_{-3\cdot 2}\mu + q_{3\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2}\mu^2 + q_{2\cdot 0} b_{-2\cdot 1}\mathfrak{s}\mathfrak{c}\Big\}\mu^3\alpha\eta' \cos(\mathrm{v}_1 - 4w)\\
&+\Big\{-q_{2\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2} + (q_{2\cdot 0} D'_{-5} b_{-5\cdot 2} - q_{4\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2})\mu - q_{1\cdot 0} D'_{-2} b_{-2\cdot 2}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^5\eta' \cos(\mathrm{v}_1 - 3w)\\
&+\Big\{ \quad q_{1\cdot 0} D'_{-3} b_{-3\cdot 2} + q_{2\cdot 0} D'_{-4} b_{-4\cdot 2} - q_{3\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2} - q_{2\cdot 0}\frac{\mathfrak{s}}{\mu^2}\mathfrak{c} - q_{1\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2}\mu\\
&\qquad\qquad + (q_{3\cdot 0} D'_{-5} b_{-5\cdot 2} - q_{4\cdot 0} D'_2 b_{2\cdot 2})\mu^2\Big\}\mu^4\alpha\eta' \cos(\mathrm{v}_1 - 2w)\\
&+\Big\{ \quad q_{2\cdot 0} D'_{-3} b_{-3\cdot 2} - q_{3\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2} + q_{1\cdot 0} D'_{-2} b_{-2\cdot 2}\frac{\alpha^2}{\mu} + (q_{4\cdot 0} D'_{-5} b_{-5\cdot 2} - q_{4\cdot 0} D'_3 b_{3\cdot 2})\mu^4\\
&\quad + (q_{3\cdot 0} D'_{-4} b_{-4\cdot 2} - q_{3\cdot 0} D'_2 b_{2\cdot 2})\alpha^2 - q_{1\cdot 0}\mathfrak{c}\mathfrak{s}\frac{\alpha^2}{\mu^2} + q_{1\cdot 0} b_{-2\cdot 1}\mathfrak{c}\mathfrak{s}\frac{\alpha^2}{\mu}\Big\}\mu^4\eta' \cos(\mathrm{v}_1 - w)\\
&+\Big\{ \quad q_{2\cdot 0} D'_{-2} b_{-2\cdot 2} - (q_{1\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2} + q_{2\cdot 0} D'_2 b_{2\cdot 2} - q_{3\cdot 0} D'_{-3} b_{-3\cdot 2})\mu + q_{1\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2}\mu^2\\
&\qquad + q_{2\cdot 0} b_{-2\cdot 1}\mathfrak{c}\mathfrak{s} - (q_{3\cdot 0} D'_3 b_{3\cdot 2} - q_{4\cdot 0} D'_{-4} b_{-4\cdot 2})\mu^3 - q_{2\cdot 0} b_{2\cdot 1}\mathfrak{c}\mathfrak{s}\mu\Big\}\mu^3\alpha\eta' \cos \mathrm{v}_1\\
&+\Big\{ \quad q_{2\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2} + (-q_{2\cdot 0} D'_3 b_{3\cdot 2} + q_{4\cdot 0} D'_{-3} b_{-3\cdot 2})\mu + q_{3\cdot 0} D'_{-2} b_{-2\cdot 2}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^5\eta' \cos(\mathrm{v}_1 + w)\\
&+\Big\{ \quad q_{1\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2} + q_{2\cdot 0}\mathfrak{c}\frac{\mathfrak{s}}{\mu^2} + \Big(q_{3\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2} + q_{4\cdot 0} D'_{-2} b_{-2\cdot 2}\Big)\mu\Big\}\mu^4\alpha\eta' \cos(\mathrm{v}_1 + 2w)\\
&+\Big\{ \quad q_{2\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2} + q_{4\cdot 0}\frac{\delta_2}{\mu} b_{-1\cdot 2}\mu^3\Big\}\mu^4\eta' \cos(\mathrm{v}_1 + 3w)\\
&+\Big\{ \quad q_{2\cdot 0} D'_2 b_{2\cdot 2} + q_{3\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2}\Big\}\mu^4\alpha\eta' \cos(\mathrm{v}_1 + 4w)\\
&+\Big\{ \quad q_{2\cdot 0} D'_3 b_{3\cdot 2} + q_{4\cdot 0} D'_1 b_{1\cdot 2}\Big\}\mu^6\eta' \cos(\mathrm{v}_1 + 5w).
\end{aligned}
$$

15. Wir sind nun in der Lage, die Bestimmungsgleichungen für die a- und b-Koeffizienten aufzuschreiben, von deren Lösung wir dann weiter unten handeln wollen. Vorher müssen allerdings noch die linken Seiten der obigen Differentialgleichungen, d. h. die Grössen $\frac{dS_1}{dv}$ und $\frac{d^2\varrho_1}{dv^2} + \varrho_1$ gebildet werden. Die Bildung von $\frac{dS_1}{dv}$ kann sofort erfolgen, da wir auf Seite 68) abgeleitet haben:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\eta\cos(\mathrm{v} + nw)}{dv} &= -D_n\eta\,\sin(\mathrm{v} + nw) - \mathfrak{s}\alpha\varkappa_1\sin(\mathrm{v}_1 + nw)\\
\frac{d\eta'\cos(\mathrm{v}_1 + nw)}{dv} &= -D'_n\eta'\sin(\mathrm{v}_1 + nw).
\end{aligned}
$$

Indem man in derselben Weise, wie Seite 67, nochmals differenzirt, erhält man

120) $$\frac{d^2\eta\cos(\mathrm{v}+nw)}{dv^2} = -D_n^2\eta\cos(\mathrm{v}+nw)-(D_n+D_n')\varsigma\alpha\varkappa_1\cos(\mathrm{v}_1+nw)$$
$$= -D_n^2\eta\cos(\mathrm{v}+nw)-(2D_n'-\varsigma)\varsigma\alpha\varkappa_1\cos(\mathrm{v}_1+nw)$$

und hiernach

121) $$\frac{d^2\eta\cos(\mathrm{v}+nw)}{dv^2}+\eta\cos(\mathrm{v}+nw) = (1-D_n^2)\eta\cos(\mathrm{v}+nw)$$
$$-(2D_n'-\varsigma)\varsigma\alpha\varkappa_1\cos(\mathrm{v}_1+nw)$$
$$\frac{d^2\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw)}{dv^2}+\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw) = (1-D_n'^2)\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw).$$

Wenn man jetzt die im vorigen gefundenen Ausdrücke in die Differentialgleichungen einsetzt und nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten die Faktoren der einzelnen Argumente $\eta\cos(\mathrm{v}+nw)$ und $\eta'\cos(\mathrm{v}_1+nw)$ einander gleichsetzt, so erhält man folgende Bestimmungsgleichungen für die unbekannten Koeffizienten:

Aus der Gleichung für S_1:

$$D_{-8}a_{-8.1}\mu^7 = -\{3q_{2.0}a_{-6.1}+3q_{4.0}a_{-4.1}+q_{2.3}'b_{-6.1}+q_{4.3}'b_{-4.1}+q_{6.3}'b_{-2.1}\}\mu^7$$
$$D_{-7}a_{-7.1}\mu^5\alpha = -\{3q_{2.0}a_{-5.1}+3q_{3.0}a_{-4.1}+q_{2.3}'b_{-5.1}+q_{3.3}'b_{-4.1}+q_{5.3}'b_{-2.1}\}\mu^5\alpha$$
$$D_{-6}a_{-6.1}\mu^5 = \{-3q_{2.0}a_{-4.1}-q_{2.3}'b_{-4.1}-q_{4.3}'b_{-2.1}+(q_{-5.1}'-3q_{4.0}a_{-2.1}+q_{2.4}'c_{-4.1}+q_{4.4}'c_{-2.1})\mu\}\mu^5$$
$$D_{-5}a_{-5.1}\mu^3\alpha = \{-q_{2.3}'b_{-2.1}+(q_{-5.1}'-3q_{2.0}a_{-3.1}-3q_{3.0}a_{-2.1}-q_{2.3}'b_{-3.1}+q_{3.4}'c_{-2.1})\mu$$
$$+(-3q_{1.0}a_{-4.1}-3q_{4.0}a_{-1.1}-q_{1.3}'b_{-4.1}-q_{4.3}'b_{-1.1}+q_{2.4}'c_{-3.1}+q_{4.4}'c_{-1.1})\mu^2\}\mu^3\alpha$$
$$D_{-4}a_{-4.1}\mu^3 = \{-q_{2.3}'b_{-2.1}+(q_{-4.1}'-3q_{2.0}a_{-2.1}+q_{2.4}'c_{-2.1})\mu$$
$$+(3q_{2.0}a_{-6.1}-3q_{4.0}a_{0.1}+q_{2.3}'b_{-6.1}+q_{4.4}'c_{0.1})\mu^4$$
$$-(3q_{3.0}a_{-1.1}+q_{3.3}'b_{-1.1}-q_{3.4}'c_{-1.1})\alpha^2\}\mu^3$$
$$D_{-3}a_{-3.1}\mu^2\alpha = \{q_{-3.1}'-(3q_{2.0}a_{-1.1}+q_{1.3}'b_{-2.1}+q_{2.3}'b_{-1.1}-q_{2.4}'c_{-1.1})\mu-(3q_{1.0}a_{-2.1}-q_{1.4}'c_{-2.1})\mu^2$$
$$+(3q_{1.0}a_{-4.1}+3q_{2.0}a_{-5.1}-3q_{3.0}a_{0.1}+q_{1.3}'b_{-4.1}+q_{2.3}'b_{-5.1}+q_{3.4}'c_{0.1})\mu^3\}\mu^2\alpha$$
122) $$D_{-2}a_{-2.1}\mu = \{q_{-2.1}'+(3q_{2.0}a_{-4.1}-3q_{2.0}a_{0.1}+q_{2.3}'b_{-4.1}+q_{2.4}'c_{0.1})\mu^3$$
$$-(3q_{4.0}a_{2.1}+q_{4.3}'b_{2.1}-q_{0.4}'c_{-2.1}-q_{2.4}'c_{-4.1})\mu^4+q_{4.4}'c_{2.1}\mu^5$$
$$-(3q_{1.0}a_{-1.1}+q_{1.3}'b_{-1.1}-q_{1.4}'c_{-1.1})\mu\alpha^2$$
$$+(3q_{1.0}a_{-3.1}-3q_{3.0}a_{1.1}+q_{1.3}'b_{-3.1}-q_{3.3}'b_{1.1}+q_{3.4}'c_{1.1})\mu^2\alpha^2\}\mu$$
$$\frac{\delta_2-\varsigma}{\mu}a_{-1.1}\alpha = \{q_{-1.1}'+q_{1.3}'b_{-2.1}\mu+(q_{2.3}'b_{-3.1}-q_{2.3}'b_{1.1}-q_{3.3}'b_{2.1}+q_{1.4}'c_{-2.1}$$
$$+q_{2.4}'c_{1.1}+3q_{1.0}a_{-2.1}+3q_{2.0}a_{-3.1}-3q_{2.0}a_{1.1}-3q_{3.0}a_{2.1})\mu^2$$
$$+(q_{3.3}'b_{-4.1}+q_{0.4}'c_{-1.1}+q_{2.4}'c_{-3.1}+q_{1.4}'c_{0.1}+q_{3.4}'c_{2.1}-3q_{1.0}a_{0.1}+3q_{3.0}a_{-4.1})\mu^3$$
$$+(-q_{3.3}'b_{3.1}+q_{3.4}'c_{-4.1}-3q_{4.0}a_{3.1})\mu^4+(q_{4.3}'b_{-5.1}+q_{4.4}'c_{3.1}+3q_{4.0}a_{-5.1})\mu^5\}\alpha$$
$$(1-\varsigma)a_{0.1}\mu^2 = \{q_{2.3}'b_{-2.1}+(q_{0.1}'-q_{2.3}'b_{2.1}+q_{2.4}'c_{-2.1}+3q_{2.0}a_{-2.1}-3q_{2.0}a_{2.1})\mu$$
$$+q_{2.4}'c_{2.1}\mu^2+(q_{4.3}'b_{-4.1}+3q_{4.0}a_{-4.1}+q_{0.4}'c_{0.1})\mu^4+(q_{1.3}'b_{-1.1}+q_{1.4}'c_{-1.1}+3q_{1.0}a_{-1.1})\alpha^2$$
$$+(-q_{1.3}'b_{1.1}+q_{3.3}'b_{-3.1}-q_{3.3}'b_{3.1}+q_{1.4}'c_{1.1}-3q_{1.0}a_{1.1}+3q_{3.0}a_{-3.1}-3q_{3.0}a_{3.1})\mu\alpha^2$$
$$+(-q_{4.3}'b_{4.1}+q_{4.4}'c_{-4.1}-3q_{4.0}a_{4.1})\mu^5+q_{4.4}'c_{4.1}\mu^6+(q_{3.4}'c_{3.1}+q_{3.4}'c_{-3.1})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

$$D_1\ a_{1\cdot1}\ \mu\ \alpha = \{q'_{1\cdot1}+(q'_{2\cdot3}b_{-1\cdot1}+q'_{3\cdot3}b_{-2\cdot1}+q'_{2\cdot4}c_{-1\cdot1}+3q_{2\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu$$
$$+(-q'_{1\cdot3}b_{2\cdot1}-q'_{2\cdot3}b_{3\cdot1}+q'_{3\cdot4}c_{-2\cdot1}-3q_{1\cdot0}a_{2\cdot1}-3q_{2\cdot0}a_{3\cdot1}+3q_{3\cdot0}a_{-2\cdot1})\mu^2$$
$$+(q'_{1\cdot4}c_{2\cdot1}+q'_{2\cdot4}c_{3\cdot1}+3q_{1\cdot0}a_{0\cdot1}+q'_{1\cdot4}c_{0\cdot1})\mu^3\}\mu\alpha$$

$$D_2\ a_{2\cdot1}\ \mu^2 = \{q'_{2\cdot1}+(q'_{4\cdot3}b_{-2\cdot1}+3q_{2\cdot0}a_{0\cdot1}+q'_{2\cdot4}c_{0\cdot1})\mu^3$$
$$+(-q'_{2\cdot3}b_{4\cdot1}+q'_{4\cdot4}c_{-2\cdot1}-3q_{2\cdot0}a_{4\cdot1}+3q_{4\cdot0}a_{-2\cdot1})\mu^4$$
122) $$+(q'_{0\cdot4}c_{2\cdot1}+q'_{2\cdot4}c_{4\cdot1})\mu^5+(q'_{3\cdot3}b_{-1\cdot1}+q'_{3\cdot4}c_{-1\cdot1}+3q_{3\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$D_3\ a_{3\cdot1}\ \mu^3\alpha = \{q'_{3\cdot1}+(q'_{1\cdot3}b_{2\cdot1}+q'_{2\cdot3}b_{1\cdot1}+q'_{2\cdot4}c_{1\cdot1}+3q_{1\cdot0}a_{2\cdot1}+3q_{2\cdot0}a_{1\cdot1})\mu^2$$
$$+(q'_{4\cdot3}b_{-1\cdot1}+q'_{5\cdot3}b_{-2\cdot1}+q'_{1\cdot4}c_{2\cdot1}+q'_{4\cdot4}c_{-1\cdot1}+3q_{3\cdot0}a_{0\cdot1}+3q_{4\cdot0}a_{-1\cdot1}+q'_{3\cdot4}c_{0\cdot1})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$D_4\ a_{4\cdot1}\ \mu^4 = \{q'_{4\cdot1}+q'_{2\cdot3}b_{2\cdot1}+3q_{2\cdot0}a_{2\cdot1}+q'_{2\cdot4}c_{2\cdot1}\mu+(q'_{6\cdot3}b_{-2\cdot1}+3q_{4\cdot0}a_{0\cdot1}+q'_{4\cdot4}c_{0\cdot1})\mu^3\}\mu^4$$

$$D_5\ a_{5\cdot1}\ \mu^4\alpha = \{q'_{5\cdot1}+q'_{2\cdot3}b_{3\cdot1}+q'_{3\cdot3}b_{2\cdot1}+3q_{2\cdot0}a_{3\cdot1}+3q_{3\cdot0}a_{2\cdot1}+(q'_{2\cdot4}c_{3\cdot1}+q'_{3\cdot4}c_{2\cdot1})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$D_6\ a_{6\cdot1}\ \mu^6 = \{q'_{6\cdot1}+q'_{2\cdot3}b_{4\cdot1}+q'_{4\cdot3}b_{2\cdot1}+3q_{2\cdot0}a_{4\cdot1}+3q_{4\cdot0}a_{2\cdot1}+(q'_{2\cdot4}c_{4\cdot1}+q'_{4\cdot4}c_{2\cdot1})\mu\}\mu^6$$

$$D'_{-7}\ a_{-7\cdot2}\mu^6 = \{q'_{-7\cdot2}-q'_{2\cdot3}b_{-5\cdot2}-q'_{4\cdot3}b_{-3\cdot2}-3q_{2\cdot0}a_{-5\cdot2}-3q_{4\cdot0}a_{-3\cdot2}+(q'_{2\cdot4}c_{-5\cdot2}+q'_{4\cdot4}c_{-3\cdot2})\mu\}\mu^6$$

$$D'_{-6}\ a_{-6\cdot2}\mu^4\alpha = \{q'_{-6\cdot2}-q'_{2\cdot3}b_{-4\cdot2}-q'_{3\cdot3}b_{-3\cdot2}-3q_{2\cdot0}a_{-4\cdot2}-3q_{3\cdot0}a_{-3\cdot2}$$
$$+(-q'_{4\cdot3}b_{-2\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-4\cdot2}+q'_{3\cdot4}c_{-3\cdot2})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$D'_{-5}\ a_{-5\cdot2}\mu^4 = \Big\{q'_{-5\cdot2}-q'_{2\cdot3}b_{-3\cdot2}-3q_{2\cdot0}a_{-3\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-3\cdot2}\mu+(-q'_{4\cdot3}b_{-1\cdot2}+q'_{4\cdot4}c_{-1\cdot2})\mu^2$$
$$-3q_{4\cdot0}a_{-1\cdot2}\mu^3-q'_{3\cdot3}b_{-2\cdot2}\frac{\alpha^2}{\mu}\Big\}\mu^4$$

$$D'_{-4}\ a_{-4\cdot2}+\mu\,\mathfrak{Sc}\,a_{-4\cdot1}\mu^2\alpha = \{q'_{-4\cdot2}-q'_{2\cdot3}b_{-2\cdot2}\mu+(-q'_{1\cdot3}b_{-3\cdot2}-q'_{3\cdot3}b_{-1\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-2\cdot2}+q'_{3\cdot4}c_{-1\cdot2}$$
$$-3q_{2\cdot0}a_{-2\cdot2}-3q_{1\cdot0}a_{-3\cdot2})\mu^2+(q'_{1\cdot4}c_{-3\cdot2}-3q_{3\cdot0}a_{-1\cdot2})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$D'_{-3}\ a_{-3\cdot2}\mu^2 = \{q'_{-3\cdot2}+(-q'_{2\cdot3}b_{-1\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-1\cdot2})\mu^2-3q_{2\cdot0}a_{-1\cdot2}\mu^3$$
$$+(q'_{2\cdot3}b_{-5\cdot2}-q'_{4\cdot3}b_{1\cdot2}+3q_{2\cdot0}a_{-5\cdot2}-3q_{4\cdot0}a_{1\cdot2})\mu^4$$
$$+(q'_{0\cdot4}c_{-3\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-5\cdot2}+q'_{4\cdot4}c_{1\cdot2})\mu^5-q'_{1\cdot3}b_{-2\cdot2}\mu\alpha^2\}\mu^2$$

123) $$\{D'_{-2}\ a_{-2\cdot2}+\mathfrak{Sc}\,a_{-2\cdot1}\}\mu\alpha = \{q'_{-2\cdot2}+(q'_{1\cdot3}b_{-3\cdot2}-q'_{1\cdot3}b_{-1\cdot2}+q'_{2\cdot3}b_{-4\cdot2}-q'_{3\cdot3}b_{1\cdot2}$$
$$+q'_{1\cdot4}c_{-1\cdot2}+3q_{1\cdot0}a_{-3\cdot2}+3q_{2\cdot0}a_{-4\cdot2}-3q_{2\cdot0}a_{0\cdot2}-3q_{3\cdot0}a_{1\cdot2})\mu^2$$
$$+(q'_{1\cdot4}c_{-3\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{0\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-4\cdot2}+q'_{3\cdot4}c_{1\cdot2}-3q_{1\cdot0}a_{-1\cdot2})\mu^3$$
$$+(q'_{3\cdot3}b_{-5\cdot2}-q'_{4\cdot3}b_{2\cdot2}+q'_{0\cdot4}c_{-2\cdot2}+3q_{3\cdot0}a_{-5\cdot2}-3q_{4\cdot0}a_{2\cdot2})\mu^4\}\mu\alpha$$

$$\left\{\frac{\delta_2}{\mu}\,a_{-1\cdot2}+\frac{\alpha^2}{\mu^3}\,\mathfrak{Sc}\,a_{-1\cdot1}\right\}\mu = \Big\{q'_{-1\cdot2}+q'_{2\cdot3}b_{-3\cdot2}-q'_{2\cdot3}b_{1\cdot2}+3q_{2\cdot0}a_{-3\cdot2}-3q_{2\cdot0}a_{1\cdot2}$$
$$+(q'_{2\cdot4}c_{1\cdot2}+q'_{2\cdot4}c_{-3\cdot2})\mu+q'_{0\cdot4}c_{-1\cdot2}\mu^2+q'_{1\cdot3}b_{-2\cdot2}\frac{\alpha^2}{\mu}$$
$$+(q'_{4\cdot3}b_{-5\cdot2}-q'_{4\cdot3}b_{3\cdot2}+3q_{4\cdot0}a_{-5\cdot2}-3q_{4\cdot0}a_{3\cdot2})\mu^4$$
$$+(q'_{2\cdot3}b_{-4\cdot2}-q'_{3\cdot3}b_{2\cdot2}+q'_{1\cdot4}c_{-2\cdot2}+3q_{1\cdot0}a_{-2\cdot2}$$
$$-3q_{1\cdot0}a_{0\cdot2}+3q_{3\cdot0}a_{-4\cdot2}-3q_{3\cdot0}a_{2\cdot2})\alpha^2$$
$$+(q'_{4\cdot4}c_{-5\cdot2}+q'_{4\cdot4}c_{3\cdot2})\mu^5+(q'_{1\cdot4}c_{0\cdot2}+q'_{3\cdot4}c_{-4\cdot2}+q_{3\cdot4}c_{2\cdot2})\mu\alpha^2\Big\}\mu$$

$$\{a_{0\cdot 2} - \mu\, \mathfrak{s}\, \mathfrak{c}\, a_{0\cdot 1}\}\mu^2\alpha = \{q'_{0\cdot 2} + q'_{2\cdot 3} b_{-2\cdot 2}\mu + (q'_{1\cdot 3} b_{-1\cdot 2} - q'_{1\cdot 3} b_{1\cdot 2} - q'_{2\cdot 3} b_{2\cdot 2} + q'_{3\cdot 3} b_{-2\cdot 2}$$
$$+ q'_{1\cdot 4} c_{-1\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{-2\cdot 2} - 3q_{1\cdot 0} a_{1\cdot 2} - 3q_{2\cdot 0} a_{-2\cdot 2} - 3q_{2\cdot 0} a_{2\cdot 2} + 3q_{3\cdot 0} a_{-3\cdot 2})\mu^3$$
$$+ (q'_{1\cdot 4} c_{1\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{2\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{-3\cdot 2} + 3q_{1\cdot 0} a_{-1\cdot 2})\mu^3$$
$$+ (-q'_{3\cdot 3} b_{3\cdot 2} + q'_{4\cdot 3} b_{-4\cdot 2} - 3q_{3\cdot 0} a_{3\cdot 2} + 3q_{4\cdot 0} a_{-4\cdot 2})\mu^4$$
$$+ (q'_{0\cdot 4} c_{0\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{3\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{-4\cdot 2})\mu^5\}\mu^2\alpha$$

123)

$$D'_1 a_{1\cdot 2}\mu^2 = \{q'_{1\cdot 2} + (q'_{2\cdot 3} b_{-1\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{-1\cdot 2})\mu^2 + 3q_{2\cdot 0} a_{-1\cdot 2}\mu^3$$
$$+ (-3q_{2\cdot 0} a_{3\cdot 2} + 3q_{4\cdot 0} a_{-3\cdot 2} - q'_{2\cdot 3} b_{3\cdot 2} + q'_{4\cdot 3} b_{-3\cdot 2})\mu^4$$
$$+ (q_{0\cdot 4} c_{1\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{3\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{-3\cdot 2})\mu^5 + q'_{3\cdot 3} b_{-2\cdot 2}\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$\{D'_2 a_{2\cdot 2} + \mathfrak{s}\, \mathfrak{c}\, a_{2\cdot 1}\}\mu^2\alpha = \{q'_{2\cdot 2} + (q'_{1\cdot 3} b_{1\cdot 2} + q'_{3\cdot 3} b_{-1\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{-1\cdot 2} + 3q_{1\cdot 0} a_{1\cdot 2} + 3q_{2\cdot 0} a_{0\cdot 2})\mu^3$$
$$+ (q'_{4\cdot 3} b_{-2\cdot 2} + q'_{1\cdot 4} c_{1\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{0\cdot 2} + 3q_{3\cdot 0} a_{-1\cdot 2})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$D'_3 a_{3\cdot 2}\mu^4 = \{q'_{3\cdot 2} + q'_{2\cdot 3} b_{1\cdot 2} + 3q_{2\cdot 0} a_{1\cdot 2} + q'_{2\cdot 4} c_{1\cdot 2}\mu$$
$$+ (q'_{4\cdot 3} b_{-1\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{-1\cdot 2})\mu^2 + 3q_{4\cdot 0} a_{-1\cdot 2}\mu^3\}\mu^4$$

$$D'_4 a_{4\cdot 2}\mu^4\alpha = \{q'_{4\cdot 2} + q'_{2\cdot 3} b_{2\cdot 2} + q'_{3\cdot 3} b_{1\cdot 2} + 3q_{2\cdot 0} a_{2\cdot 2} + 3q_{3\cdot 0} a_{1\cdot 2} + (q'_{2\cdot 4} c_{2\cdot 2} + q'_{3\cdot 4} c_{1\cdot 2})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$D'_5 a_{5\cdot 2}\mu^6 = \{q'_{5\cdot 2} + q'_{2\cdot 3} b_{3\cdot 2} + q'_{4\cdot 3} b_{1\cdot 2} + 3q_{2\cdot 0} a_{3\cdot 2} + 3q_{4\cdot 0} a_{1\cdot 2} + (q'_{2\cdot 4} c_{3\cdot 2} + q'_{4\cdot 4} c_{1\cdot 2})\mu\}\mu^6.$$

16. Aus der Gleichung für ϱ_1;

124)

$$(1 - D^2_{-3}) b_{-3\cdot 1}\mu^7 = \{2a_{-3\cdot 1} + (q_{2\cdot 0} D_{-6} - t_{2\cdot 3}) b_{-6\cdot 1} + (q_{4\cdot 0} D_{-4} - t_{4\cdot 3}) b_{-4\cdot 1}$$
$$+ (q_{6\cdot 0} D_{-2} - t_{6\cdot 3}) b_{-2\cdot 1} + 2l_{2\cdot 0} a_{-6\cdot 1} + 2l_{4\cdot 0} a_{-4\cdot 1}\}\mu^7$$

$$(1 - D^2_{-7}) b_{-7\cdot 1}\mu^5\alpha = \{2a_{-7\cdot 1} + (q_{2\cdot 0} D_{-5} - t_{2\cdot 3}) b_{-5\cdot 1} + (q_{3\cdot 0} D_{-4} - t_{3\cdot 3}) b_{-4\cdot 1}$$
$$+ (q_{5\cdot 0} D_{-2} - t_{5\cdot 3}) b_{-2\cdot 1} + 2l_{2\cdot 0} a_{-5\cdot 1} + 2l_{3\cdot 0} a_{-4\cdot 1}\}\mu^5\alpha$$

$$(1 - D^2_{-6}) b_{-6\cdot 1}\mu^5 = \{2a_{-6\cdot 1} + (q_{2\cdot 0} D_{-4} - t_{2\cdot 3}) b_{-4\cdot 1} + (q_{4\cdot 0} D_{-2} - t_{4\cdot 3}) b_{-2\cdot 1} + 2l_{2\cdot 0} a_{-4\cdot 1}$$
$$+ ((1 - \mathfrak{s}) q_{6\cdot 0} - t_{6\cdot 1} + t_{2\cdot 4} c_{-4\cdot 1} - t_{4\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + 2l_{4\cdot 0} a_{-2\cdot 1})\mu$$
$$+ (-t_{0\cdot 3} b_{-6\cdot 1} + 2l_{0\cdot 0} a_{-6\cdot 1})\mu^2\}\mu^5$$

$$(1 - D^2_{-5}) b_{-5\cdot 1}\mu^3\alpha = \{2a_{-5\cdot 1} + (q_{3\cdot 0} D_{-2} - t_{3\cdot 3}) b_{-2\cdot 1}$$
$$+ ((q_{2\cdot 0} D_{-3} - t_{2\cdot 3}) b_{-3\cdot 1} + (1 - \mathfrak{s}) q_{5\cdot 0} - t_{-5\cdot 1} - t_{3\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + 2l_{3\cdot 0} a_{-3\cdot 1}$$
$$+ 2l_{3\cdot 0} a_{-2\cdot 1})\mu + ((q_{1\cdot 0} D_{-4} - t_{1\cdot 3}) b_{-4\cdot 1} - t_{0\cdot 3} b_{-5\cdot 1} - t_{4\cdot 3} b_{-1\cdot 1}$$
$$- t_{2\cdot 4} c_{-3\cdot 1} - t_{4\cdot 4} c_{-1\cdot 1} + 2l_{0\cdot 0} a_{-5\cdot 1} + 2l_{1\cdot 0} a_{-4\cdot 1} + 2l_{4\cdot 0} a_{-1\cdot 1})\mu^2\}\mu^3\alpha$$

$$(1 - D^2_{-4}) b_{-4\cdot 1}\mu^3 = \{2a_{-4\cdot 1} + (q_{2\cdot 0} D_{-2} - t_{2\cdot 3}) b_{-2\cdot 1} + ((1 - \mathfrak{s}) q_{4\cdot 0} - t_{-4\cdot 1} - t_{2\cdot 4} c_{-2\cdot 1} + 2l_{2\cdot 0} a_{-2\cdot 1})\mu$$
$$+ (-t_{0\cdot 3} b_{-4\cdot 1} + 2l_{0\cdot 0} a_{-4\cdot 1})\mu^2$$
$$+ (-(q_{2\cdot 0} D_{-6} + t_{2\cdot 3}) b_{-6\cdot 1} - t_{4\cdot 4} c_{0\cdot 1} + 2l_{2\cdot 0} a_{-6\cdot 1} + 2l_{4\cdot 0} a_{0\cdot 1})\mu^4$$
$$+ (-t_{3\cdot 3} b_{-1\cdot 1} - t_{3\cdot 4} c_{-1\cdot 1} + 2l_{2\cdot 0} a_{-1\cdot 1})\alpha^2\}\mu^3$$

$$(1-D_{-3}^2)\,b_{-3\cdot1}\mu^2\alpha = \{2a_{-3\cdot1}+(1-\varsigma)q_{3\cdot0}-t_{-3\cdot1}$$
$$+((q_{1\cdot0}D_{-2}-t_{1\cdot3})b_{-2\cdot1}-t_{2\cdot3}b_{-1\cdot1}-t_{1\cdot4}c_{-1\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu$$
$$+\left(q_{2\cdot0}\frac{\delta_2^{\cdot}-\varsigma}{\mu}b_{-1\cdot1}-t_{0\cdot3}b_{-3\cdot1}-t_{1\cdot4}c_{-2\cdot1}+2l_{0\cdot0}a_{-3\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{-2\cdot1}\right)\mu^2$$
$$+(-(q_{1\cdot0}D_{-4}+t_{1\cdot3})b_{-4\cdot1}-(q_{2\cdot0}D_{-5}+t_{2\cdot3})b_{-5\cdot1}$$
$$-t_{3\cdot4}c_{0\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{-4\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{-5\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{0\cdot1})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$\frac{2(2\delta_2-\varsigma)-(2\delta_2-\varsigma)^2}{\mu}b_{-2\cdot1}\mu = \left\{2a_{-2\cdot1}+(1-\varsigma)q_{2\cdot0}-t_{-2\cdot1}-t_{0\cdot3}b_{-2\cdot1}\mu+2l_{0\cdot0}^{\cdot}a_{-2\cdot1}\mu^2\right.$$
$$+(-(q_{2\cdot0}D_{-4}+t_{2\cdot3})b_{-4\cdot1}-t_{2\cdot4}c_{0\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{-4\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{0\cdot1})\mu^3$$
$$+((q_{4\cdot0}D_2-t_{4\cdot3})b_{2\cdot1}+t_{2\cdot4}c_{-4\cdot1}+2l_{4\cdot0}a_{2\cdot1})\mu^4-t_{4\cdot4}c_{2\cdot1}\mu^5$$
$$+(-t_{1\cdot3}b_{-1\cdot1}-t_{1\cdot4}c_{-1\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu\alpha^2$$
$$+\left(-(q_{1\cdot0}D_{-3}+t_{1\cdot3})b_{-3\cdot1}+q_{1\cdot0}\frac{\delta_2-\varsigma}{\mu}b_{-1\cdot1}\right.$$
$$\left.\left.+(q_{3\cdot0}D_1-t_{3\cdot3})b_{1\cdot1}-t_{3\cdot4}c_{1\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{-3\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{1\cdot1}\right)\mu^2\alpha^2\right\}\mu$$

$$[1-(\delta_2-\varsigma)^2]b_{-1\cdot1}\alpha = \{2a_{-1\cdot1}+((1-\varsigma)q_{1\cdot0}-t_{-1\cdot1})\mu+(-(q_{1\cdot0}D_{-2}+t_{1\cdot3})b_{-2\cdot1}$$
$$-t_{0\cdot3}b_{-1\cdot1}+2l_{0\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu^2+(-(q_{2\cdot0}D_{-3}+t_{2\cdot3})b_{-3\cdot1}$$
$$+(q_{2\cdot0}D_1-t_{2\cdot3})b_{1\cdot1}+(q_{3\cdot0}D_2-t_{3\cdot3})b_{2\cdot1}+t_{1\cdot4}c_{-2\cdot1}-t_{2\cdot4}c_{1\cdot1}$$
$$+2l_{1\cdot0}a_{-2\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{-3\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{1\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{2\cdot1})\mu^3$$
124)
$$+(-(q_{3\cdot0}D_{-4}+t_{3\cdot3})b_{-4\cdot1}-t_{1\cdot4}c_{0\cdot1}+t_{2\cdot4}c_{-3\cdot1}-t_{3\cdot4}c_{2\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{0\cdot1}$$
$$+2l_{3\cdot0}a_{-4\cdot1})\mu^4+((q_{4\cdot0}D_3-t_{4\cdot3})b_{3\cdot1}+t_{3\cdot4}c_{-4\cdot1}+2l_{4\cdot0}a_{3\cdot1})\mu^5$$
$$+(-(q_{4\cdot0}D_{-5}+t_{4\cdot3})b_{-5\cdot1}-t_{4\cdot4}c_{3\cdot1}+2l_{4\cdot0}a_{-5\cdot1})\mu^6\}\alpha$$

$$(1-D_1^2)b_{1\cdot1}\mu\alpha = \left\{2a_{1\cdot1}-(1-\varsigma)q_{1\cdot0}-t_{1\cdot1}+(-(q_{3\cdot0}D_{-2}+t_{3\cdot3})b_{-2\cdot1}-t_{2\cdot3}b_{-1\cdot1}\right.$$
$$+t_{2\cdot4}c_{-1\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu+\left((q_{1\cdot0}D_2-t_{1\cdot3})b_{2\cdot1}-\frac{\delta_2-\varsigma}{\mu}q_{2\cdot0}b_{-1\cdot1}\right.$$
$$+(q_{2\cdot0}D_3-t_{2\cdot3})b_{3\cdot1}-t_{0\cdot3}b_{1\cdot1}+t_{3\cdot4}c_{-2\cdot1}+2l_{0\cdot0}a_{1\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{2\cdot1}$$
$$\left.\left.+2l_{2\cdot0}a_{3\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{-2\cdot1}\right)\mu^2+(t_{1\cdot4}c_{0\cdot1}-t_{1\cdot4}c_{2\cdot1}-t_{2\cdot4}c_{3\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{0\cdot1})\mu^3\right\}\mu\alpha$$

$$(1-D_2^2)b_{2\cdot1}\mu^2 = \{2a_{2\cdot1}-(1-\varsigma)q_{2\cdot0}-t_{2\cdot1}+(-t_{0\cdot3}b_{2\cdot1}+2l_{0\cdot0}a_{2\cdot1})\mu^2$$
$$+(-(q_{4\cdot0}D_{-2}+t_{4\cdot3})b_{-2\cdot1}+t_{2\cdot4}c_{0\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{0\cdot1})\mu^3$$
$$+((q_{2\cdot0}D_4-t_{2\cdot3})b_{4\cdot1}+t_{4\cdot4}c_{-2\cdot1}+2l_{2\cdot0}a_{4\cdot1}+2l_{4\cdot0}a_{-2\cdot1})\mu^4$$
$$-t_{2\cdot4}c_{4\cdot1}\mu^5+(-t_{3\cdot3}b_{-1\cdot1}+t_{3\cdot4}c_{-1\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$(1-D_3^2)b_{3\cdot1}\mu^2\alpha = \{2a_{3\cdot1}-(1-\varsigma)q_{3\cdot0}-t_{3\cdot1}+(-(q_{1\cdot0}D_2+t_{1\cdot3})b_{2\cdot1}-(q_{2\cdot0}D_1+t_{2\cdot3})b_{1\cdot1}$$
$$-t_{0\cdot3}b_{3\cdot1}+t_{2\cdot4}c_{1\cdot1}+2l_{0\cdot0}a_{3\cdot1}+2l_{1\cdot0}a_{2\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{1\cdot1})\mu^2$$
$$+(-(q_{5\cdot0}D_{-2}+t_{5\cdot3})b_{-2\cdot1}-t_{4\cdot3}b_{-1\cdot1}+t_{1\cdot4}c_{2\cdot1}+t_{3\cdot4}c_{0\cdot1}$$
$$+t_{4\cdot4}c_{-1\cdot1}+2l_{3\cdot0}a_{0\cdot1}+2l_{4\cdot0}a_{-1\cdot1})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$(1-D_4^2)b_{4,1}\mu^4 = \{2a_{4,1}-(1-s)q_{4,0}-t_{4,1}-(q_{2,0}D_2+t_{2,3})b_{2,1}+2l_{2,0}a_{2,1}+t_{2,4}c_{2,1}\mu$$
$$+(-t_{0,3}b_{4,1}+2l_{0,0}a_{4,1})\mu^2+(-(q_{6,0}D_{-2}+t_{6,3})b_{-2,1}$$
$$+t_{4,4}c_{0,1}+2l_{4,0}a_{0,1})\mu^6\}\mu^4$$

$$(1-D_5^2)b_{5,1}\mu^4\alpha = \{2a_{5,1}-(1-s)q_{5,0}-t_{5,1}-(q_{3,0}D_6+t_{3,6})b_{3,1}-(q_{3,0}D_2+t_{3,6})b_{3,1}$$
$$+2l_{2,0}a_{3,1}+2l_{3,0}a_{2,1}+(t_{2,4}c_{3,1}+t_{3,4}c_{2,1})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$(1-D_6^2)b_{6,1}\mu^6 = \{2a_{6,1}-(1-s)q_{6,0}-t_{6,1}-(q_{2,0}D_4+t_{2,3})b_{4,1}-(q_{4,0}D_2+t_{4,3})b_{2,1}$$
$$+2l_{2,0}a_{4,1}+2l_{4,0}a_{2,1}+(t_{2,4}c_{4,1}+t_{4,4}c_{2,1})\mu\}\mu^6$$

125) $$(1-D'^2_{-7})b_{-7,2}\mu^6 = \{2a_{-7,2}-t_{-7,2}+(q_{2,0}D'_{-5}-t_{2,3})b_{-5,2}+(q_{4,0}D'_{-3}-t_{4,3})b_{-3,2}$$
$$+2l_{2,0}a_{-5,2}+2l_{4,0}a_{-3,2}-(t_{2,4}c_{-5,2}+t_{4,4}c_{-3,2})\mu\}\mu^6$$

$$(1-D'^2_{-6})b_{-6,2}\mu^4\alpha = \{2a_{-6,2}-t_{-6,2}+(q_{2,0}D'_{-4}-t_{2,3})b_{-4,2}+(q_{6,0}D'_{-3}-t_{3,3})b_{-3,2}+2l_{2,0}a_{-4,2}$$
$$+2l_{3,0}a_{-3,2}+((q_{4,0}D'_{-2}-t_{4,3})b_{-2,2}-t_{2,4}c_{-4,2}-t_{6,4}c_{-6,2})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$(1-D'^2_{-5})b_{-5,2}\mu^4 = \Big\{2a_{-5,2}-t_{-5,2}+(q_{2,0}D'_{-3}-t_{2,6})b_{-3,2}+2l_{2,0}a_{-6,2}-t_{2,4}c_{-3,2}\mu$$
$$+(-t_{0,3}b_{-5,2}-t_{4,3}b_{-1,2}-t_{4,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{-5,2})\mu^2$$
$$+\Big(q_{4,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}+2l_{4,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3+(q_{6,0}D'_{-2}-t_{3,3})b_{-2,2}\frac{\alpha^2}{\mu}\Big\}\mu^4$$

$$[(1-D'^2_{-4})b_{-4,2}-(2D'_{-4}-s)cb_{-4,1}\mu s]\mu^2\alpha = \Big\{2a_{-4,2}-t_{-4,2}+(q_{2,0}D'_{-2}-t_{2,3})b_{-2,2}\mu$$
$$+((q_{1,0}D'_{-6}-t_{1,3})b_{-3,2}-t_{0,3}b_{-4,2}-t_{6,6}b_{-1,2}-t_{2,4}c_{-2,2}$$
$$-t_{6,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{-4,2}+2l_{1,0}a_{-5,2}+2l_{2,0}a_{-2,2})\mu^2$$
$$+\Big(q_{6,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}-t_{1,4}c_{-3,2}+2l_{6,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3+q_{2,0}cb_{-2,1}\mu s\Big\}\mu^2\alpha$$

$$(1-D'^2_{-3})b_{-3,2}\mu^3 = \Big\{2a_{-3,2}-t_{-3,2}+(-t_{0,6}b_{-3,2}-t_{2,6}b_{-1,2}-t_{2,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{-3,2})\mu^2$$
$$+\Big(q_{2,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}+2l_{2,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3+(-(q_{2,0}D'_{-5}+t_{2,6})b_{-5,2}$$
$$+(q_{4,0}D'_1-t_{4,3})b_{1,2}+2l_{2,0}a_{-5,2}+2l_{4,0}a_{1,2})\mu^4$$
$$+(t_{2,4}c_{-5,2}-t_{4,4}c_{1,2})\mu^5+(q_{1,0}D'_{-2}-t_{1,3})b_{-2,2}\mu\alpha^2\Big\}\mu^3$$

$$\Big[\frac{4\delta_2(1-\delta_2)}{\mu}b_{-2,2}-(2D'_{-2}-s)cb_{-2,1}\frac{s}{\mu}\Big]\mu\alpha = \Big\{2a_{-3,2}-t_{-2,2}-t_{0,3}b_{-2,2}\mu$$
$$+(-(q_{1,0}D'_{-3}+t_{1,3})b_{-3,2}-(q_{2,0}D'_{-4}+t_{2,3})b_{-4,2}+(q_{3,0}D'_1-t_{6,3})b_{1,2}$$
$$-t_{1,3}b_{-1,2}-t_{1,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{-2,2}+2l_{1,0}a_{-3,2}$$
$$+2l_{2,0}a_{-4,2}+2l_{2,0}a_{0,2}+2l_{3,0}a_{1,2})\mu^2$$
$$+q_{2,0}cs+\Big(q_{1,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}+t_{1,4}c_{-3,2}+t_{2,4}c_{-4,2}-t_{2,4}c_{0,2}-t_{3,4}c_{1,2}+2l_{1,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3$$
$$+(-(q_{3,0}D'_{-5}+t_{3,3})b_{-5,2}+(q_{4,0}D'_2-t_{4,6})b_{2,2}+2l_{3,0}a_{-5,2}+2l_{4,0}a_{2,2})\mu^4\Big\}\mu\alpha$$

$$\left[(1-D_{-1}^{2})b_{-1,2}-(2\delta_2-\varsigma)\mathfrak{c}\,b_{-1,1}\frac{\varsigma\alpha^2}{\mu}\right]\mu = \{-t_{-1,2}+2a_{-1,2}\mu$$
$$+(-(q_{2,0}D'_{-3}+t_{2,3})b_{-3,2}+(q_{2,0}D'_1-t_{2,3})b_{1,2}-t_{0,3}b_{-1,2}+2l_{2,0}a_{-3,2}+2l_{2,0}a_{1,2})\mu^2$$
$$+(t_{2,4}c_{-3,2}-t_{3,4}c_{1,2}+2l_{0,0}a_{-1,2})\mu^3-(q_{1,0}D'_{-2}+t_{1,3})b_{-2,2}\mu\alpha^2$$
$$+(-(q_{4,0}D'_{-5}+t_{4,3})b_{-5,2}+(q_{4,0}D'_3-t_{4,3})b_{3,2}+2l_{4,0}a_{-5,2}+2l_{4,0}a_{3,2})\mu^5$$
$$+q_{1,0}\mathfrak{c}\,\varsigma\alpha^2+(-(q_{3,0}D'_{-4}+t_{3,3})b_{-4,2}+(q_{3,0}D'_2-t_{3,3})b_{2,2}$$
$$+t_{1,4}c_{-2,2}+2l_{1,0}a_{-2,2}+2l_{1,0}a_{0,2}+2l_{3,0}a_{-4,2}+2l_{3,0}a_{2,2})\mu^2\alpha^2$$
$$+(t_{4,4}c_{-5,2}-t_{4,4}c_{3,2})\mu^7+(-t_{1,4}c_{0,2}+t_{3,4}c_{-4,2}-t_{3,4}c_{3,2})\mu^3\alpha^2$$
$$-q_{1,0}\mathfrak{c}\,b_{-2,1}\varsigma\mu\alpha^2\}\mu$$

$$(1-D_1^{2})b_{1,2}\mu^2 = \Big\{2a_{1,2}-t_{1,2}+(-t_{0,3}b_{1,2}-t_{2,3}b_{-1,2}+t_{2,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{1,2})\mu^2$$
$$+\Big(-q_{2,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}+2l_{2,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3$$
$$+((q_{2,0}D'_3-t_{2,3})b_{3,2}-(q_{4,0}D'_{-3}+t_{4,3})b_{-3,2}+2l_{2,0}a_{3,2}+2l_{4,0}a_{-3,2})\mu^4$$
$$+(-t_{2,4}c_{3,2}+t_{4,4}c_{-3,2})\mu^5-(q_{3,0}D'_{-2}+t_{3,3})b_{-2,2}\mu\alpha^2\Big\}\mu^2$$

$$[(1-D_2^{2})b_{2,2}-(2D_2-\varsigma)\mathfrak{c}\,b_{2,1}\varsigma]\mu^2\alpha = \Big\{2a_{2,2}-t_{2,2}+(-(q_{1,0}D'_1+t_{1,3})b_{1,2}-t_{0,3}b_{2,2}$$
$$-t_{3,3}b_{-1,2}+t_{3,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{2,2}+2l_{1,0}a_{1,2}+2l_{2,0}a_{0,2})\mu^2$$
$$-q_{2,0}\mathfrak{c}\,\varsigma+\Big(-q_{3,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}-(q_{4,0}D'_{-2}+t_{4,3})b_{-2,2}+t_{2,4}c_{0,2}$$
$$+t_{1,4}c_{1,2}+2l_{3,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3\Big\}\mu^2\alpha$$

$$(1-D_3^{2})b_{3,2}\mu^4 = \Big\{2a_{3,2}-t_{3,2}-(q_{2,0}D'_1+t_{2,3})b_{1,2}+2l_{3,0}a_{1,2}+t_{2,4}c_{1,2}\mu$$
$$+(-t_{0,3}b_{3,2}-t_{4,3}b_{-1,2}+t_{4,4}c_{-1,2}+2l_{0,0}a_{3,2})\mu^2$$
$$+\Big(-q_{4,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}+2l_{4,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3\Big\}\mu^4$$

$$(1-D_4^{2})b_{4,2}\mu^4\alpha = \{2a_{4,2}-t_{4,2}-(q_{2,0}D'_2+t_{2,3})b_{2,2}-(q_{3,0}D'_1+t_{3,3})b_{1,2}$$
$$+2l_{2,0}a_{2,2}+2l_{3,0}a_{1,2}+(t_{2,4}c_{2,2}+t_{3,4}c_{1,2})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$(1-D_5^{2})b_{5,2}\mu^6 = \{2a_{5,2}-t_{5,2}-(q_{2,0}D'_3+t_{2,3})b_{3,2}-(q_{4,0}D'_1+t_{4,3})b_{1,2}$$
$$+2l_{2,0}a_{3,2}+2l_{4,0}a_{1,2}+(t_{3,4}c_{3,2}+t_{4,4}c_{1,2})\mu\}\mu^6.$$

17. Wir gehen jetzt über zur Ermittlung der Funktion W, d. h. zur Aufstellung der Bestimmungsgleichungen für die c-Koeffizienten. Die entsprechende Differentialgleichung lautet:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos v)^2}\left\{\frac{1+S}{\left(1+\frac{R}{1+\eta\cos v}\right)^2}-1\right\}-\frac{d\Xi}{dv}.$$

Bedenkt man die Relation

$$\frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\eta\cos \mathrm{v})^2} = 1+\sum_1^\infty n B_n \cos n\mathrm{v}$$

und setzt man, wie früher

$$R = R_0 + R^{(1)},$$

so kann man sie, wie folgt, schreiben:

126) $$\frac{dW}{dv} = (1+\sum n B_n \cos n\mathrm{v})\left\{\frac{1+S}{(1+R_0)^3}\frac{1}{(1+\xi)^2}-1\right\}-\frac{d\Xi}{dv},$$

wo zur Abkürzung

127) $$\xi = \frac{R^{(1)} - R_0\eta\cos \mathrm{v}}{(1+R_0)(1+\eta\cos \mathrm{v})}$$

gesetzt und ξ vom ersten Grade ist. Entwickelt man nach Potenzen von ξ, so erhält man für die Glieder ersten Grades:

128) $$\frac{dW_1}{dv} = -2\frac{1+S_0}{(1+R_0)^3}R_1 + \frac{S_1}{(1+R_0)^2} - 2\left\{\frac{1+S_0}{(1+R_0)^3}-1\right\}\eta\cos \mathrm{v} - \frac{d\Xi_1}{dv}.$$

18. Wir setzen, entsprechend 85) und 87),

129)
$$\frac{1}{(1+R_0)^2} = 1+\sum_{-\infty}^{+\infty} r_{n\cdot 2\cdot 0}\cos nw$$
$$\frac{1}{(1+R_0)^3} = 1+\sum_{-\infty}^{+\infty} r_{n\cdot 3\cdot 0}\cos nw$$
$$\frac{1+S_0}{(1+R_0)^3} = 1+\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 3\cdot 0}\cos mw,$$

wo die Formeln für die Koeffizienten $r_{n\cdot 2\cdot 0}$ etc. bereits oben abgeleitet sind.

Unsere Gleichung lautet hiernach

130)
$$\frac{dW_1}{dv} = S_1 - 2R_1 - 2R_1\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 3\cdot 0}\cos nw + S_1\sum_{-\infty}^{+\infty} r_{n\cdot 2\cdot 0}\cos nw$$
$$-2\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 3\cdot 0}\eta\cos(\mathrm{v}+nw) - \frac{d\Xi_1}{dv}.$$

Zur Transformation der beiden mit R_1 und S_1 multiplizierten Summen benutzen wir die Formel 110), und zwar liefert sie uns

$R_1\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 3\cdot 0}\cos nw$, indem wir $i = 3$ setzen und die oberen Zeichen nehmen,

$S_1\sum_{-\infty}^{+\infty} s_{n\cdot 2\cdot 0}\cos nw$, indem wir $i = 2$ setzen, die oberen Zeichen nehmen und die b durch die entsprechenden a ersetzen, mit der Ausnahme, dass $a_{-2\cdot 1}\mu$ statt $b_{-2\cdot 1}$, $a_{-2\cdot 2}\mu$ statt $b_{-2\cdot 2}$ und $a_{-1\cdot 2}\mu$ statt $b_{-1\cdot 2}$ zu nehmen ist.

Bei Entwicklung der vorstehenden Summen sind bei den Argumenten $v - w$ und $v_1 - w$ wegen des auftretenden kleinen Integrationsdivisors δ_2 noch die Grössen von der Ordnung μ^6, $\mu^6\alpha$ etc. zu berücksichtigen. Bei den übrigen kann man sie vernachlässigen, was auch in der Formel 110) bereits geschehen ist.

19. Wir können nun die Bestimmungsgleichungen aufstellen für die c-Koeffizienten, indem wir in die Gleichung 130) die eben gefundenen Ausdrücke einsetzen. Die linke Seite dieser Gleichung $\frac{dW_1}{dv} = \frac{dK_1}{dv}$ bilden wir durch Differentiation des Ausdrucks 109), wobei wir bemerken, dass analog 114) und 115):

131)
$$\frac{d\eta \sin(v + nw)}{dv} = D_n \eta \cos(v + nw) + \varsigma\varkappa_1 \alpha \cos(v_1 + nw)$$
$$\frac{d\eta' \sin(v_1 + nw)}{dv} = D'_n \eta' \cos(v_1 + nw).$$

132)
$$D_{-6} c_{-3.1} \mu^7 = \{a_{-3.1} - 2b_{-3.1} - 2s_{2.3} b_{-6.1} - 2s_{4.3} b_{-4.1} - 2s_{6.3} b_{-2.1} + r_{2.2} a_{-3.1} + r_{4.2} a_{-4.1}\} \mu^7$$

$$D_{-7} c_{-7.1} \mu^5 \alpha = \{a_{-7.1} - 2b_{-7.1} - 2s_{2.3} b_{-5.1} - 2s_{3.3} b_{-4.1} - 2s_{5.3} b_{-2.1} + r_{2.2} a_{-5.1} + r_{3.2} a_{-4.1}\} \mu^5 \alpha$$

$$D_{-6} c_{-6.1} \mu^5 = \{a_{-6.1} - 2b_{-6.1} - 2s_{2.3} b_{-4.1} - 2s_{4.3} b_{-2.1} + r_{2.2} a_{-4.1} + (-2s_{3.3} + r_{4.2} a_{-2.1})\mu + (-2s_{0.3} b_{-6.1} + r_{0.2} a_{-6.1})\mu^2\} \mu^5$$

$$D_{-5} c_{-5.1} \mu^5 \alpha = \{a_{-5.1} - 2b_{-5.1} - 2s_{2.3} b_{-2.1} + (-2s_{2.3} - 2s_{1.3} b_{-4.1} - 2s_{2.3} b_{-3.1} + r_{1.2} a_{-4.1} + r_{2.2} a_{-3.1} + r_{3.2} a_{-2.1})\mu + (-2s_{0.3} b_{-5.1} - 2s_{4.3} b_{-1.1} + r_{0.2} a_{-5.1} + r_{4.2} a_{-1.1})\mu^2\} \mu^3 \alpha$$

$$D_{-4} c_{-4.1} \mu^3 = \{a_{-4.1} - 2b_{-4.1} - 2s_{2.3} b_{-2.1} + (-2s_{4.3} + r_{2.2} a_{-2.1})\mu + (-2s_{0.3} b_{-4.1} + r_{0.2} a_{-4.1})\mu^2 + (-2s_{2.3} b_{-6.1} + r_{2.2} a_{-6.1} + r_{4.2} a_{0.1})\mu^4 + (-2s_{1.3} b_{-3.1} - 2s_{3.3} b_{-1.1} + r_{1.2} a_{-3.1} + r_{3.2} a_{-1.1})\alpha^2\} \mu^3$$

$$D_{-3} c_{-3.1} \mu^3 \alpha = \{a_{-3.1} - 2b_{-3.1} - 2s_{3.3} - 2s_{1.3} b_{-2.1} + (-2s_{3.3} b_{-1.1} + r_{1.2} a_{-2.1} + r_{2.2} a_{-1.1})\mu + (-2s_{0.3} b_{-3.1} - 2s_{1.3} b_{-4.1} + r_{0.2} a_{-3.1} + r_{1.2} a_{-4.1})\mu^2 + (-2s_{2.3} b_{-5.1} + r_{2.2} a_{-5.1} + r_{3.2} a_{0.1})\mu^3\} \mu^2 \alpha$$

$$D_{-2} c_{-2.1} \mu = \{-2b_{-2.1} + (a_{-2.1} - 2s_{2.3})\mu - 2s_{0.3} b_{-2.1} \mu^2 + r_{0.2} a_{-2.1} \mu^3 + (-2s_{2.3} b_{-4.1} + r_{2.2} a_{-4.1} + r_{2.2} a_{0.1})\mu^4 + (-2s_{4.3} b_{2.1} + r_{4.2} a_{2.1})\mu^5 + (-2s_{1.3} b_{-1.1} + r_{1.2} a_{-1.1})\mu\alpha^2 + (-2s_{1.3} b_{-3.1} + r_{1.2} a_{-3.1})\mu^2\alpha^2\} \mu$$

$$\frac{\delta_2 - \varsigma}{\mu} c_{-1.1} \alpha = \{a_{-1.1} - 2b_{-1.1} - 2s_{1.3} - 2s_{1.3} b_{-2.1}\mu + (-2s_{0.3} b_{-1.1} + r_{0.2} a_{-1.1} + r_{1.2} a_{-2.1})\mu^2 + (-2s_{2.3} b_{-3.1} - 2s_{2.3} b_{1.1} - 2s_{3.3} b_{2.1} + r_{1.2} a_{0.1} + r_{2.2} a_{-3.1} + r_{2.2} a_{1.1} + r_{3.2} a_{2.1})\mu^3 + (-2s_{3.3} b_{-4.1} + r_{3.2} a_{-4.1})\mu^4 + (-2s_{4.3} b_{3.1} + r_{4.2} a_{3.1})\mu^5\} \alpha$$

$$(1 - \varsigma) c_{0.1} \mu^2 = \Big\{-2s_{0.3} - 2\frac{\varsigma}{\mu^2} + (a_{0.1} - 2s_{2.3} b_{-2.1})\mu + (-2s_{2.3} b_{2.1} + r_{2.2} a_{-2.1} + r_{2.2} a_{2.1})\mu^2 + r_{0.2} a_{0.1} \mu^3 + (-2s_{1.3} b_{-1.1} + r_{1.2} a_{-1.1})\alpha^2 + (-2s_{4.3} b_{-4.1} + r_{4.2} a_{-4.1})\mu^5 + (-2s_{1.3} b_{1.1} + r_{1.2} a_{1.1})\mu\alpha^2\Big\} \mu^2$$

$$D_1 c_{1.1}\mu\alpha = \{-2s_{1.3}+(a_{1.1}-2b_{1.1})\mu$$
$$+(-2s_{1.3}b_{2.1}-2s_{2.3}b_{-1.1}-2s_{3.3}b_{-2.1}+r_{1.2}a_{3.1}+r_{2.2}a_{-1.1})\mu^2$$
$$+(-2s_{0.3}b_{1.1}-2s_{2.3}b_{3.1}+r_{0.2}a_{1.1}+r_{1.2}a_{0.1}+r_{2.2}a_{3.1}+r_{3.2}a_{-2.1})\mu^3\}\mu\alpha$$

$$D_2 c_{2.1}\mu^2 = \{a_{2.1}-2b_{2.1}-2s_{2.3}+(-2s_{0.3}b_{3.1}+r_{0.2}a_{2.1})\mu^2+(-2s_{4.3}b_{-2.1}+r_{2.2}a_{0.1})\mu^3$$
$$+(-2s_{2.3}b_{4.1}+r_{2.2}a_{4.1}+r_{4.2}a_{-2.1})\mu^4$$
132) $$+(-2s_{1.3}b_{1.1}-2s_{1.3}b_{3.1}-2s_{3.3}b_{-1.1}+r_{1.2}a_{1.1}+r_{1.2}a_{3.1}+r_{3.2}a_{-1.1})\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$D_3 c_{3.1}\mu^2\alpha = \{a_{3.1}-2b_{3.1}-2s_{3.3}+(-2s_{1.3}b_{2.1}+r_{1.2}a_{2.1})\mu$$
$$+(-2s_{0.3}b_{3.1}-2s_{2.3}b_{1.1}+r_{0.2}a_{3.1}+r_{2.2}a_{1.1})\mu^2$$
$$+(-2s_{1.3}b_{4.1}-2s_{4.3}b_{-1.1}-2s_{5.3}b_{-2.1}+r_{1.2}a_{4.1}+r_{3.2}a_{0.1}+r_{4.2}a_{-1.1})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$D_4 c_{4.1}\mu^4 = \left\{a_{4.1}-2b_{4.1}-2s_{4.3}-2s_{2.3}b_{2.1}+r_{2.2}a_{2.1}+(-2s_{0.3}b_{4.1}+r_{0.2}a_{4.1})\mu^2\right.$$
$$\left.+(-2s_{3.3}b_{-2.1}+r_{4.2}a_{0.1})\mu^3+(-2s_{1.3}b_{3.1}+r_{1.2}a_{3.1})\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$D_5 c_{5.1}\mu^4\alpha = \{a_{5.1}-2b_{5.1}-2s_{5.3}-2s_{2.3}b_{3.1}-2s_{3.3}b_{2.1}+r_{2.2}a_{3.1}+r_{3.2}a_{2.1}$$
$$+(-2s_{1.3}b_{4.1}+r_{1.2}a_{4.1})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$D_6 c_{6.1}\mu^5 = \{a_{3.1}-2b_{3.1}-2s_{6.3}-2s_{2.3}b_{4.1}-2s_{4.3}b_{2.1}+r_{2.2}a_{4.1}+r_{4.2}a_{2.1}\}\mu^5$$

133) $$D'_{-7}c_{-7.2}\mu^5 = \{a_{-7.2}-2b_{-7.2}-2s_{2.3}b_{-5.2}-2s_{4.3}b_{-3.2}+r_{2.2}a_{-5.2}+r_{4.2}a_{-3.2}\}\mu^3$$

$$D'_{-6}c_{-6.2}\mu^4\alpha = \{a_{-6.2}-2b_{-6.2}-2s_{2.3}b_{-4.2}-2s_{3.3}b_{-3.2}+r_{2.2}a_{-4.2}+r_{3.2}a_{-3.2}$$
$$+(-2s_{1.3}b_{-5.2}-2s_{4.3}b_{-2.2}+r_{1.2}a_{-5.2})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$D'_{-5}c_{-5.2}\mu^4 = \left\{a_{-5.2}-2b_{-5.2}-2s_{2.3}b_{-3.2}+r_{2.2}a_{-3.2}\right.$$
$$+(-2s_{0.3}b_{-5.2}-2s_{4.3}b_{-1.2}+r_{0.2}a_{-5.2})\mu^2+r_{4.2}a_{-1.2}\mu^3$$
$$\left.+(-2s_{1.3}b_{-4.2}-2s_{3.3}b_{-2.2}+r_{1.2}a_{-4.2})\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$[D'_{-4}c_{-4.2}+\mathfrak{c}c_{-4.1}\mu\varsigma]\mu^3\alpha = \{a_{-4.2}-2b_{-4.2}+(-2s_{1.3}b_{-3.2}-2s_{2.3}b_{-2.2}+r_{1.2}a_{-3.2})\mu$$
$$+(-2s_{0.3}b_{-4.2}-2s_{3.3}b_{-1.2}+r_{0.2}a_{-4.2}+r_{2.2}a_{-2.2})\mu^2$$
$$+(-2s_{1.3}b_{-5.2}+r_{1.2}a_{-5.2}+r_{3.2}a_{-1.2})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$D'_{-3}c_{-3.2}\mu^2 = \{a_{-3.2}-2b_{-3.2}+(-2s_{0.3}b_{-3.2}-2s_{2.3}b_{-1.2}+r_{0.2}a_{-3.2})\mu^2+r_{2.2}a_{-1.2}\mu^3$$
$$+(-2s_{2.3}b_{-5.2}-2s_{4.3}b_{1.2}+r_{2.2}a_{-5.2}+r_{4.2}a_{1.2})\mu^4-2s_{1.3}b_{-2.2}\alpha^2$$
$$+(-2s_{1.3}b_{-4.2}+r_{1.2}a_{-4.2}+r_{1.2}a_{-2.2})\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$[D'_{-2}c_{-2.2}+\mathfrak{c}c_{-2.1}\varsigma]\mu\alpha = \{-2b_{-2.2}+a_{-2.2}\mu+(-2s_{0.3}b_{-2.2}-2s_{1.3}b_{-3.2}-2s_{1.3}b_{-1.2}+r_{1.2}a_{-3.2})\mu^2$$
$$+(-2s_{2.3}b_{-4.2}-2s_{3.3}b_{1.2}+r_{0.2}a_{-2.2}+r_{1.2}a_{-1.2}+r_{2.2}a_{-4.2}+r_{2.2}a_{0.2}+r_{3.2}a_{1.2})\mu^3\}\mu\alpha$$

$$\left[\frac{\partial_2}{\mu}c_{-1.2}+\mathfrak{c}c_{-1.1}\frac{\varsigma\alpha^2}{\mu^2}\right]\mu = \{-2b_{-1.2}+a_{-1.2}\mu$$
$$+(-2s_{0.3}b_{-1.2}-2s_{2.3}(b_{-3.2}+b_{1.2})+r_{2.2}(a_{-3.2}+a_{1.2}))\mu^2$$
$$+r_{0.2}a_{-1.2}\mu^3-2s_{1.3}b_{-2.2}\alpha^2+r_{1.2}(a_{-2.2}+a_{0.2})\mu\alpha^2$$
$$+(-2s_{4.3}(b_{-5.2}+b_{3.2})+r_{4.2}(a_{-5.2}+a_{3.2}))\mu^6$$
$$+(-2s_{3.3}(b_{-4.2}+b_{2.2})+r_{3.2}(a_{-4.2}+a_{2.2}))\mu^2\alpha^2\}\mu$$

$$[c_{0,2}+\mathfrak{c}c_{0,1}\varsigma]\mu^2\alpha = \Big\{a_{0,2}+2\mathfrak{c}\frac{\varsigma}{\mu^2}+(-2s_{1,3}(b_{-1,2}+b_{1,2})-2s_{2,3}b_{-2,2}+r_{1,2}a_{1,2})\mu + (-2s_{2,3}b_{2,2}-2s_{3,3}b_{-3,2}+r_{0,2}a_{0,2}+r_{1,2}a_{-1,2} + r_{2,2}(a_{-2,2}+a_{2,2})+r_{3,2}a_{-3,2})\mu^2\Big\}\mu^2\alpha$$

$$\Big[D_1'c_{1,2}+\mathfrak{c}c_{1,1}\frac{\varsigma\alpha^2}{\mu}\Big]\mu^2 = \{a_{1,2}-2b_{1,2}+(-2s_{0,3}b_{1,2}-2s_{3,3}b_{-1,2}+r_{0,2}a_{1,2})\mu^2+r_{2,2}a_{-1,2}\mu^3 + (-2s_{2,3}b_{3,2}-2s_{4,3}b_{-3,2}+r_{2,2}a_{3,2}+r_{4,2}a_{-3,2})\mu^4 + (-2s_{1,3}b_{2,2}-2s_{3,3}b_{-2,2}+r_{1,2}(a_{0,2}+a_{2,2}))\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$[D_2'c_{2,2}+\mathfrak{c}c_{2,1}\varsigma]\mu^2\alpha = \{a_{2,2}-2b_{2,2}+(-2s_{1,3}b_{1,2}+r_{1,2}a_{1,2})\mu + (-2s_{0,3}b_{2,2}-2s_{3,3}b_{-1,2}+r_{0,2}a_{2,2}+r_{2,2}a_{0,2})\mu^2 + (-2s_{1,3}b_{3,2}-2s_{4,3}b_{-2,2}+r_{1,2}a_{3,2}+r_{3,2}a_{-1,2})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$D_3'c_{3,2}\mu^4 = \Big\{a_{3,2}-2b_{3,2}-2s_{2,3}b_{1,2}+r_{2,2}a_{1,2}+(-2s_{0,3}b_{3,2}-2s_{4,3}b_{-1,2}+r_{0,2}a_{3,2})\mu^2 + r_{4,2}a_{-1,2}\mu^3+(-2s_{1,3}b_{2,2}+r_{1,2}a_{2,2})\frac{\alpha^2}{\mu}\Big\}\mu^4$$

$$D_4'c_{4,2}\mu^4\alpha = \{a_{4,2}-2b_{4,2}-2s_{2,3}b_{2,2}-2s_{3,3}b_{1,2}+r_{2,2}a_{2,2}+r_{3,2}a_{1,2} + (-2s_{1,3}b_{3,2}+r_{1,2}a_{3,2})\mu\}\mu^4\alpha$$

$$D_5'c_{5,2}\mu^5 = \{a_{5,2}-2b_{5,2}-2s_{2,3}b_{3,2}-2s_{4,3}b_{1,2}+r_{2,2}a_{3,2}+r_{4,2}a_{1,2}\}\mu^5.$$

20. Zur Bestimmung der Funktion (ϱ), welche die Apsidenbewegung ς enthält, erhalten wir die Gleichung

$$135)\qquad \frac{d^2(\varrho)}{dv^2}+(\varrho) = \beta\mu^3\eta\cos v+\beta'\mu^2\alpha\eta'\cos v_1,$$

wo die Koeffizienten β und β' folgende Zusammensetzung haben:

$$136)\quad \beta = -t_{0,1}+(2a_{0,1}-(q_{2,0}D_{-2}+t_{2,3})b_{-2,1})\mu+((q_{2,0}D_2-t_{2,3})b_{2,1}+t_{2,4}c_{-2,1}+2r_{2,0}(a_{-2,1}+a_{2,1}))\mu^2 + (-t_{2,4}c_{2,1}+2r_{0,0}a_{0,1})\mu^3+(-(q_{4,0}D_{-4}+t_{4,3})b_{-4,1}+2r_{4,0}a_{-4,1})\mu^5 + (-t_{1,3}b_{-1,1}+t_{1,4}c_{-1,1}+2r_{1,0}a_{-1,1})\mu\alpha^2+((q_{4,0}D_4-t_{4,3})b_{4,1}+t_{4,4}c_{-4,1}+2r_{4,0}a_{4,1})\mu^6 + \Big(-q_{1,0}\frac{\delta_2-\varsigma}{\mu}b_{-1,1}+(q_{1,0}D_1-t_{1,3})b_{1,1}-(q_{3,0}D_{-3}+t_{3,3})b_{-3,1} + (q_{3,0}D_3-t_{3,3})b_{3,1}-t_{1,4}c_{1,1}-2r_{1,0}a_{1,1}+2r_{3,0}(a_{-3,1}+a_{3,1})\Big)\mu^2\alpha^2 - t_{4,4}c_{4,1}\mu^7+t_{3,4}(c_{-3,1}-c_{3,1})\mu^3\alpha^2$$

$$137)\quad \beta' = 2a_{0,2}-t_{0,2}-(q_{2,0}D_{-2}'+t_{2,3})b_{-2,2}\mu + ((q_{1,0}D_1'-t_{1,3})b_{1,2}+(q_{2,0}D_2'-t_{2,3})b_{2,2}-(q_{3,0}D_{-3}'+t_{3,3})b_{-3,2}-t_{1,3}b_{-1,2}+t_{1,4}c_{-1,2} + t_{2,4}c_{-2,2}+2r_{0,0}a_{0,2}+2r_{1,0}a_{1,2}+2r_{2,0}(a_{-2,2}+a_{2,2})+2r_{3,0}a_{-3,2})\mu^2 + \Big(-q_{1,0}\frac{\delta_2}{\mu}b_{-1,2}-t_{1,4}c_{1,2}-t_{2,4}c_{2,2}+t_{3,4}c_{-3,2}+2r_{1,0}a_{-1,2}\Big)\mu^3+\mathfrak{c}q_{2,0}b_{-2,1}\mu\varsigma + ((q_{3,0}D_3'-t_{3,3})b_{3,2}-(q_{4,0}D_{-4}'+t_{4,3})b_{-4,2}+2r_{3,0}a_{3,2}+2r_{4,0}a_{-4,2})\mu^4+\mathfrak{c}q_{2,0}b_{2,1}\mu^2\varsigma + (-t_{3,4}c_{3,2}+t_{4,4}c_{-4,2})\mu^5.$$

Da nun $(\varrho) = \eta \cos v$ ist, so wird

138) $$\frac{d^2(\varrho)}{dv^2} + (\varrho) = (1 - D_0^2)\eta \cos v - (2D_0' - \varsigma)\varsigma\varkappa_1 \cos v_1$$
$$= (2\varsigma - \varsigma^2)\eta \cos v - (2\varsigma - \varsigma^2)\alpha\varkappa_1 \cos v_1,$$

also

139) $$(2\varsigma - \varsigma^2)\eta = \beta\mu^2\eta \quad \text{und} \quad (2\varsigma - \varsigma^2)\varkappa_1 = -\beta'\mu^2\eta'$$

wonach sich ς aus der Gleichung

140) $$2\varsigma - \varsigma^2 = \beta\mu^2$$

und $\varkappa_1$ aus der Gleichung

141) $$\mathfrak{c} = \frac{\varkappa_1}{\eta'} = -\frac{\beta'\mu^2}{2\varsigma - \varsigma^2} = -\frac{\beta'}{\beta}$$

bestimmt.

21. Nachdem nun sämmtliche Gleichungen (122, 123, 124, 125, 132, 133, 136, 137) zur Bestimmung der Koeffizienten a, b, c und der Grössen ς und $\varkappa_1$ aufgestellt sind, will ich erst die numerischen Werte aller in ihnen vorkommenden bekannten Koeffizienten anführen, ehe ich über die Lösung der Bestimmungsgleichungen spreche:

n	$\log q_{n\cdot 1}$	$\log p_{n\cdot 1}$	$\log q'_{n\cdot 1}$	$\log p'_{n\cdot 1}$	$\log t_{n\cdot 1}$
−6	1,563$_n$	1,321$_n$	1,643$_n$	1,276$_n$	1,600$_n$
−5	1,515	1,340	1,560	1,001	1,504
−4	1,09185	0,89157	1,13627	0,58295	1,06515
−3	0,76561$_n$	0,65611$_n$	0,76558$_n$	9,22073$_n$	0,65730$_n$
−2	0,5080489$_n$	0,3887004$_n$	0,5088625$_n$	1,21648	0,3886089$_n$
−1	0,26260$_n$	0,48233$_n$	0,26097$_n$	0,17002	0,46621$_n$
0	0,19789	0,1497847$_n$	0,24612	0,85270$_n$	0,1618756$_n$
+1	0,22984	0,44597$_n$	0,22909	0,07370	0,43196$_n$
+2	0,4428561	0,3006403$_n$	0,4436620	1,28017	0,3005105$_n$
+3	0,69102	0,56064$_n$	0,69094	0,27080$_n$	0,57700$_n$
+4	1,03751$_n$	0,82115	1,08091$_n$	0,51776	0,99646
+5	1,453$_n$	1,262	1,497$_n$	0,930	1,428
+6	1,514	1,259$_n$	1,593	1,219$_n$	1,541$_n$

n	$\log q_{n\cdot 2}$	$\log p_{n\cdot 2}$	$\log q'_{n\cdot 2}$	$\log p'_{n\cdot 2}$	$\log t_{n\cdot 2}$
−7	1,645	1,499	1,739	1,425	1,765
−6	1,683$_n$	1,593$_n$	1,735$_n$	1,231$_n$	1,750$_n$
−5	1,22096$_n$	1,12134$_n$	1,27404$_n$	0,79511$_n$	1,28920$_n$
−4	1,01035	0,99580	1,01046	0,55734	1,00748
−3	0,7202166	0,7187290	0,7210570	0,81591	0,7187461
−2	0,33982	0,64122	0,33364	0,46644$_n$	0,61893
−1	1,33020$_n$	0,1543863	1,37779$_n$	0,72809	0,1633978
0	9,54501$_n$	0,05937	9,57218$_n$	9,96765	0,08491
+1	9,8761036	9,8882223$_n$	9,8771476	1,46671$_n$	9,8887372$_n$
+2	0,30473	0,30291$_n$	0,30534	9,76048$_n$	0,31213$_n$
+3	0,39391$_n$	0,31312	0,44509$_n$	9,95100	0,46978
+4	0,966$_n$	0,881	1,015$_n$	0,491	1,029
+5	0,828	0,688$_n$	0,919	0,594$_n$	0,944$_n$

n	$\log q_{n\cdot 3}$	$\log p_{n\cdot 3}$	$\log q'_{n\cdot 3}$	$\log p'_{n\cdot 3}$	$\log t_{n\cdot 3}$
0	$-\infty$	0,14978$_n$	$-\infty$	0,85260$_n$	0,16187$_n$
1	0,24633	0,46475$_n$	0,24502	0,12581	0,44963$_n$
2	0,47667	0,34690$_n$	0,47748	1,24946	0,34678$_n$
3	0,72997	0,61136$_n$	0,72997	0,30190$_n$	0,62706$_n$
4	1,06551$_n$	0,85799	1,10944$_n$	0,55133	1,03222
5	1,482$_n$	1,295	1,528$_n$	0,967	1,462
6	1,537	1,285$_n$	1,618	1,248$_n$	1,568$_n$

n	$\log q_{n\cdot 4}$	$\log p_{n\cdot 4}$	$\log q'_{n\cdot 4}$	$\log p'_{n\cdot 4}$	$\log t_{n\cdot 4}$
0	1,02295$_n$	$-\infty$	1,07119$_n$	$-\infty$	$-\infty$
1	9,65182	9,90569	9,63948	9,98318$_n$	9,86510
2	0,17630	0,17644	0,17717	0,93872	0,17652
3	0,48780	0,47537	0,48827	0,01995	0,48657
4	0,68626$_n$	0,59073$_n$	0,73830$_n$	0,25115$_n$	0,75435$_n$
5	1,163$_n$	1,075$_n$	1,215$_n$	0,703$_n$	1,229$_n$
6	1,115	0,972	1,208	0,888	1,233

n	$\log t'_{n\cdot 0}$	$\log l_{n\cdot 0}$	$\log r_{n\cdot 3}$	$\log s_{n\cdot 3}$
0	9,6891642	9,2033604$_n$	9,6940294$_n$	9,1970497$_n$
1	9,85546	0,04274$_n$	0,35546	0,34993
2	9,8709022	0,0602721$_n$	0,2831803$_n$	0,3669808$_n$
3	0,02557	0,16047$_n$	0,09774$_n$	0,23151$_n$
4	0,40105$_n$	0,51290	0,54593	0,70231
5	0,753$_n$	0,845	0,645	0,853
6	0,840	0,922$_n$	0,816$_n$	1,035$_n$

n	$\log D_n$	$\log D'_n$	$\log(1-D_n^2)$	$\log(1-D_n'^2)$
−8	$0{,}807_n$	—	$1{,}603_n$	—
−7	$0{,}739_n$	$0{,}738_n$	$1{,}464_n$	$1{,}462_n$
−6	$0{,}6589_n$	$0{,}658_n$	$1{,}2965_n$	$1{,}295_n$
−5	$0{,}5604_n$	$0{,}55943_n$	$1{,}0867_n$	$1{,}08450_n$
−4	$0{,}432849_n$	$0{,}43149_n$	$0{,}802092_n$	$0{,}79895_n$
−3	$0{,}25140_n$	$0{,}249345_n$	$0{,}33902_n$	$0{,}33299_n$
−2	$9{,}9339168_n$	$9{,}9296217_n$	*)	*)
−1	*)	*)	9,9980839	9,9975632
0	9,9963137	0,0000000	—	—
+1	0,282565	0,284476	$0{,}427148_n$	$0{,}432390_n$
+2	0,4536157	0,45490	$0{,}8498277_n$	$0{,}85277_n$
+3	0,57602	0,57699	$1{,}12028_n$	$1{,}12239_n$
+4	0,67139	0,672	$1{,}32259_n$	$1{,}324_n$
+5	0,750	0,750	$1{,}485_n$	$1{,}486_n$
+6	0,816	—	$1{,}621_n$	—

$$
\begin{aligned}
*)\ D_{-1} &= \delta_2 - \varsigma \\
D'_{-1} &= \delta_2 \\
D_0 &= 1 - \varsigma \\
D'_0 &= 1 \\
1 - D_{-2}^2 &= 2(2\delta_2 - \varsigma) - (2\delta_2 - \varsigma)^2 \\
1 - D_{-2}'^2 &= 4\delta_2(1 - \delta_2) \\
\log \frac{D_{-1}}{\mu} &= 9{,}9479279 \\
-\frac{D'_{-1}}{\mu} &= 0{,}0000006 \\
-\frac{1 - D_{-2}^2}{\mu} &= 0{,}5450184 \\
-\frac{1 - D_{-2}'^2}{\mu} &= 0{,}5682955
\end{aligned}
$$

22. Die Auflösung der Bestimmungsgleichungen wird man nicht direkt, sondern durch Annäherungen vornehmen. Allerdings bilden die Gleichungen für die $a_{n\cdot 1}$, $b_{n\cdot 1}$, $c_{n\cdot 1}$ ein lineares System; da sie aber 45 Unbekannte enthalten, so führt die indirekte Methode viel leichter zum Ziel: man kann zunächst $a_{-2\cdot 1}$ berechnen mit Fortlassung der Glieder von der Ordnung μ^4, nämlich

$$a_{-2\cdot 1} = \frac{q'_{-2\cdot 1}}{D_{-2}},$$

sodann mit derselben Genauigkeit $b_{-2\cdot1}$ und $c_{-2\cdot1}$; dann $a_{-4\cdot1}$, $b_{-4\cdot1}$, $c_{-4\cdot1}$ bis zur Ordnung μ^7 exklusive; dann $a_{-1\cdot1}$, $b_{-1\cdot1}$, $c_{-1\cdot1}$ bis $\mu^3\alpha$ exklusive, $a_{-3\cdot1}$, $b_{-3\cdot1}$, $c_{-3\cdot1}$ bis $\mu^4\alpha$, sodann $a_{-5\cdot1}$, $b_{-5\cdot1}$, $c_{-5\cdot1}$ vollständig u. s. w.

Andererseits kann man $a_{2\cdot1}$, $b_{2\cdot1}$, $c_{2\cdot1}$ bis zur Ordnung μ^5 exklusive, $a_{3\cdot1}$, $b_{3\cdot1}$, $c_{3\cdot1}$, $a_{1\cdot1}$, $b_{1\cdot1}$, $c_{1\cdot1}$ bis $\mu^4\alpha$, $a_{0\cdot1}$, $c_{0\cdot1}$ fast vollständig berechnen. Die Rechnung ist so lange fortzusetzen, bis die Werte sich nicht mehr ändern.

In den Gleichungen kommt, teils direkt, teils in den Divisoren D_n, die Grösse ς vor; für sie wäre in Wirklichkeit der Wert einzusetzen, den man nach Berücksichtigung aller Glieder höherer Grade erhielte, da wir es vermeiden wollen, die Divisoren nach Potenzen der Exzentrizitäten zu entwickeln. Infolgedessen tun wir am besten, den bereits anderweitig bekannten Betrag (etwas abgerundet) für die Apsidenbewegung zu setzen, nämlich

$$\log \varsigma = 7{,}92696 - 10.$$

Mit diesem Werte sind auch bereits die Werte der Divisoren D_n und D'_n auf der vorigen Seite gerechnet.

23. Die numerische Lösung der Gleichungen 122), 124), 132) ergab:

$\log a_{-8\cdot1} = 1{,}44$	$\log b_{-8\cdot1} = 0{,}79_n$	$\log c_{-8\cdot1} = 1{,}34_n$
$- a_{-7\cdot1} = 1{,}32_n$	$- b_{-7\cdot1} = 0{,}74$	$- c_{-7\cdot1} = 1{,}19$
$- a_{-6\cdot1} = 0{,}899_n$	$- b_{-6\cdot1} = 0{,}444$	$- c_{-6\cdot1} = 0{,}916$
$- a_{-5\cdot1} = 0{,}351$	$- b_{-5\cdot1} = 0{,}015_n$	$- c_{-5\cdot1} = 0{,}491_n$
$- a_{-4\cdot1} = 0{,}33404$	$- b_{-4\cdot1} = 0{,}20224_n$	$- c_{-4\cdot1} = 0{,}79320_n$
$- a_{-3\cdot1} = 0{,}5102$	$- b_{-3\cdot1} = 0{,}6738_n$	$- c_{-3\cdot1} = 0{,}2880_n$
$- a_{-2\cdot1} = 0{,}5748763$	$- b_{-2\cdot1} = 0{,}4324929$	$- c_{-2\cdot1} = 0{,}7456136$
$- a_{-1\cdot1} = 0{,}235285_n$	$- b_{-1\cdot1} = 0{,}512603_n$	$- c_{-1\cdot1} = 9{,}810879_n$
$- a_{0\cdot1} = 0{,}937497$	$- b_{0\cdot1} = -\infty$	$- c_{0\cdot1} = 0{,}071071_n$
$- a_{1\cdot1} = 0{,}08478$	$- b_{1\cdot1} = 0{,}33658_n$	$- c_{1\cdot1} = 0{,}32546_n$
$- a_{2\cdot1} = 9{,}986277$	$- b_{2\cdot1} = 9{,}817902_n$	$- c_{2\cdot1} = 0{,}3865762$
$- a_{3\cdot1} = 0{,}1043$	$- b_{3\cdot1} = 9{,}7396_n$	$- c_{3\cdot1} = 0{,}2042$
$- a_{4\cdot1} = 0{,}5288_n$	$- b_{4\cdot1} = 0{,}0545$	$- c_{4\cdot1} = 0{,}6296_n$
$- a_{5\cdot1} = 0{,}87_n$	$- b_{5\cdot1} = 0{,}29$	$- c_{5\cdot1} = 0{,}78_n$
$- a_{6\cdot1} = 0{,}99$	$- b_{6\cdot1} = 0{,}34_n$	$- c_{6\cdot1} = 0{,}92.$

24. In ähnlicher Weise werden die Gleichungen für $a_{n\cdot2}$, $b_{n\cdot2}$, $c_{n\cdot2}$ gelöst; sie enthalten aber noch die Grösse $\mathfrak{c} = \frac{\varkappa_1}{\eta'}$, so dass die Gleichungen 136), 137) gleichzeitig heranzuziehen sind. Auch die Grösse ς findet sich hierbei, soweit sie nicht von den Gliedern höherer Grade abhängt. Ich habe schon bemerkt, dass die ganze

Rechnung mit dem wahren Werte von ς ausgeführt werden sollte, wie er sich mit Berücksichtigung der Glieder höherer Grade ergibt; zur letzten Ausfeilung der Rechnung wäre es daher ratsam, die Rechnung für mehrere Werte von ς auszuführen, so dass man nach Abschluss des Ganzen die wahren Werte aller Koeffizienten interpoliren kann.

Es ergaben sich die folgenden Resultate:

$\log a_{-7\cdot 2} = 1{,}52_n$	$\log b_{-7\cdot 2} = 0{,}97$	$\log c_{-7\cdot 2} = 1{,}44$
$-a_{-6\cdot 2} = 1{,}38$	$-b_{-6\cdot 2} = 0{,}93_n$	$-c_{-6\cdot 2} = 1{,}27_n$
$-a_{-5\cdot 2} = 1{,}0477$	$-b_{-5\cdot 2} = 0{,}7372_n$	$-c_{-5\cdot 2} = 1{,}1408_n$
$-a_{-4\cdot 2} = 0{,}6018_n$	$-b_{-4\cdot 2} = 0{,}4700$	$-c_{-4\cdot 2} = 0{,}6798$
$-a_{-3\cdot 2} = 0{,}475032_n$	$-b_{-3\cdot 2} = 0{,}715993$	$-c_{-3\cdot 2} = 0{,}877830$
$-a_{-2\cdot 2} = 0{,}43816_n$	$-b_{-2\cdot 2} = 0{,}44655_n$	$-c_{-2\cdot 2} = 0{,}78779_n$
$-a_{-1\cdot 2} = 0{,}2642084$	$-b_{-1\cdot 2} = 0{,}0556463_n$	$-c_{-1\cdot 2} = 0{,}4061650$
$-a_{0\cdot 2} = 9{,}89573_n$	$-b_{0\cdot 2} = -\infty$	$-c_{0\cdot 2} = 0{,}30309$
$-a_{1\cdot 2} = 9{,}591265$	$-b_{1\cdot 2} = 9{,}758632_n$	$-c_{1\cdot 2} = 9{,}892606$
$-a_{2\cdot 2} = 9{,}8543$	$-b_{2\cdot 2} = 9{,}6876_n$	$-c_{2\cdot 2} = 9{,}8229$
$-a_{3\cdot 2} = 0{,}1464_n$	$-b_{3\cdot 2} = 9{,}8156$	$-c_{3\cdot 2} = 0{,}1872_n$
$-a_{4\cdot 2} = 0{,}57_n$	$-b_{4\cdot 2} = 0{,}10$	$-c_{4\cdot 2} = 0{,}40_n$
$-a_{5\cdot 2} = 0{,}61$	$-b_{5\cdot 2} = 0{,}05_n$	$-c_{5\cdot 2} = 0{,}50$

$$\log \beta = 0{,}4842695 \qquad \log \varsigma = 7{,}92922$$
$$-\beta' = 0{,}48291_n \qquad -\mathfrak{c} = 9{,}99864.$$

Ich beschliesse hiermit die vorliegende Arbeit, obwohl ein grosser Teil der Glieder zweiten Grades schon berechnet ist; es wird sich aber empfehlen, für die weitere Rechnung die Entwicklungen noch etwas anders zu gestalten, um auch für die Glieder höherer Grade alle wünschenswerte Schärfe zu erreichen. Ich hoffe hierüber ein andermal zu berichten.

Göttingen, im Juli 1904.

Anhang.

Tafel 1 (s. Seite 48).

$$g_{0\cdot0} = 0$$

$$p_{0\cdot0\cdot0} = p_{0\cdot0}\mu^2 = \{f_{0\cdot0}B_{0\cdot0} + (2f_{0\cdot2}B_{2\cdot0} + g_{0\cdot0}B_{0\cdot1} + 2g_{0\cdot2}B_{2\cdot1})\mu^2 + (h_{0\cdot0}B_{0\cdot2} + 2h_{0\cdot2}B_{2\cdot2})\mu^4 + 2g_{0\cdot1}B_{1\cdot1}\mu\alpha^2 + (k_0B_{0\cdot3} + 2k_2'B_{2\cdot3})\mu^6 + (2f_{0\cdot1}'B_{1\cdot0} + 2f_{0\cdot3}B_{3\cdot0} + 2g_{0\cdot3}B_{3\cdot1})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

$$p_{1\cdot0\cdot0} = p_{1\cdot0}\mu^2\alpha = \{f_{1\cdot0}B_{1\cdot0} + (g_{1\cdot1}B_{0\cdot1} + g_{1\cdot1}'B_{2\cdot1})\mu + (f_{1\cdot1}B_{0\cdot0} + f_{1\cdot1}'B_{2\cdot0} \pm f_{1\cdot2}B_{1\cdot0} + f_{1\cdot2}'B_{3\cdot0} \pm f_{1\cdot3}B_{2\cdot0} + g_{1\cdot0}B_{1\cdot1} \pm g_{1\cdot2}B_{1\cdot1} + g_{1\cdot2}'B_{3\cdot1} \pm g_{1\cdot3}B_{2\cdot1})\mu^2 + (h_{1\cdot1}B_{0\cdot2} + h_{1\cdot1}'B_{2\cdot2} \pm h_{1\cdot3}B_{2\cdot2})\mu^3 + (\pm f_{1\cdot4}B_{3\cdot0} \pm g_{1\cdot4}B_{3\cdot1} + h_{1\cdot0}B_{1\cdot2} \pm h_{1\cdot2}B_{1\cdot2} + h_{1\cdot2}'B_{3\cdot2} \pm h_{1\cdot4}B_{3\cdot2})\mu^4 + (k_1B_{0\cdot3} + k_1'B_{2\cdot3} \pm k_3B_{2\cdot3})\mu^5\}\mu^2\alpha$$

$$p_{2\cdot0\cdot0} = p_{2\cdot0}\mu^2 = \{f_{2\cdot0}B_{2\cdot0} + (f_{2\cdot2}B_{0\cdot0} + g_{2\cdot0}B_{2\cdot1} + g_{2\cdot2}B_{0\cdot1})\mu^2 + (\pm f_{2\cdot4}B_{2\cdot0} \pm g_{2\cdot4}B_{2\cdot1} + h_{2\cdot0}B_{2\cdot2} + h_{2\cdot2}B_{0\cdot2} \pm h_{2\cdot4}B_{2\cdot2})\mu^4 + (g_{2\cdot1}B_{1\cdot1} + g_{2\cdot1}'B_{3\cdot1})\mu\alpha^2 + (k_0B_{2\cdot3} + k_2B_{0\cdot3} \pm k_4B_{2\cdot3})\mu^6 + (f_{2\cdot1}B_{1\cdot0} \pm f_{2\cdot3}B_{1\cdot0} + f_{2\cdot1}'B_{3\cdot0} + f_{2\cdot2}'B_{4\cdot0} \pm g_{2\cdot3}B_{1\cdot1} + g_{2\cdot2}'B_{4\cdot1})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

$$p_{3\cdot0\cdot0} = p_{3\cdot0}\mu^2\alpha = \{f_{3\cdot0}B_{3\cdot0} + g_{3\cdot1}B_{2\cdot1}\mu + (f_{3\cdot1}B_{2\cdot0} + f_{3\cdot2}B_{1\cdot0} + f_{3\cdot3}B_{0\cdot0} + g_{3\cdot0}B_{3\cdot1} + g_{3\cdot2}B_{1\cdot1} + g_{3\cdot3}B_{0\cdot1})\mu^2 + (h_{3\cdot1}B_{2\cdot2} + h_{3\cdot3}B_{0\cdot2})\mu^3 + (\pm f_{3\cdot4}B_{1\cdot0} \pm f_{3\cdot5}B_{2\cdot0} \pm g_{3\cdot4}B_{1\cdot1} \pm g_{3\cdot5}B_{2\cdot1} + h_{3\cdot0}B_{3\cdot2} + h_{3\cdot2}B_{1\cdot2} \pm h_{3\cdot4}B_{1\cdot2} \pm h_{3\cdot5}B_{2\cdot2})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$p_{4\cdot0\cdot0} = p_{4\cdot0}\mu^4 = \{f_{4\cdot2}B_{2\cdot0} + g_{4\cdot2}B_{2\cdot1} + (f_{4\cdot4}B_{0\cdot0} + g_{4\cdot4}B_{0\cdot1} + h_{4\cdot2}B_{2\cdot2} + h_{4\cdot4}B_{0\cdot2})\mu^2 + f_{4\cdot0}B_{4\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu^2} + g_{4\cdot1}B_{3\cdot1}\frac{\alpha^2}{\mu} + (\pm f_{4\cdot6}B_{2\cdot0} \pm g_{4\cdot6}B_{2\cdot1} \pm h_{4\cdot6}B_{2\cdot2} + k_2B_{2\cdot3} + k_4B_{0\cdot3} \pm k_6B_{2\cdot3})\mu^4 + (f_{4\cdot1}B_{3\cdot0} + f_{4\cdot3}B_{1\cdot0} + g_{4\cdot0}B_{4\cdot1} + g_{4\cdot3}B_{1\cdot1})\alpha^2\}\mu^4$$

$$p_{5\cdot0\cdot0} = p_{5\cdot0}\mu^4\alpha = \left\{f_{5\cdot2}B_{3\cdot0} + f_{5\cdot3}B_{2\cdot0} + g_{3\cdot2}B_{3\cdot1} + g_{5\cdot3}B_{2\cdot1} + h_{5\cdot3}B_{2\cdot2}\mu + (f_{5\cdot4}B_{1\cdot0} + f_{5\cdot5}B_{0\cdot0} + g_{5\cdot4}B_{1\cdot1} + g_{5\cdot5}B_{0\cdot1} + h_{5\cdot2}B_{3\cdot2} + h_{5\cdot4}B_{1\cdot2} + h_{5\cdot5}B_{0\cdot2})\mu^2 + f_{5\cdot0}B_{5\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^4\alpha$$

$$p_{6\cdot0\cdot0} = p_{6\cdot0}\mu^6 = \Big\{f_{6\cdot4}B_{2\cdot0} + g_{6\cdot4}B_{2\cdot1} + h_{6\cdot4}B_{2\cdot2} + (f_{6\cdot6}B_{0\cdot0} + g_{6\cdot6}B_{0\cdot1} + h_{6\cdot6}B_{0\cdot2} + k_4B_{2\cdot3} + k_6B_{0\cdot3})\mu^2 + (f_{6\cdot2}B_{4\cdot0} + f_{6\cdot3}B_{3\cdot0} + g_{6\cdot2}B_{4\cdot1} + g_{6\cdot3}B_{3\cdot1})\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^6$$

$$q_{-n\cdot0\cdot0} = -q_{n\cdot0\cdot0}, \qquad p_{-n\cdot0\cdot0} = p_{n\cdot0\cdot0}.$$

Tafel 2 (s. Seite 49).

$$q'_{0\cdot0} = 0$$

$$q'_{1\cdot0\cdot0} = q'_{1\cdot0}\mu^2\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{1\cdot0} + (a_1q_{2\cdot0} - a_2q_{1\cdot0} + a_2q_{3\cdot0} - a_3q_{2\cdot0})\mu^2 + (a_3q_{4\cdot0} - a_4q_{3\cdot0})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$q'_{2\cdot0\cdot0} = q'_{2\cdot0}\mu^2 = \{(1+a_0\mu^2)q_{2\cdot0} + (a_2q_{4\cdot0} - a_4q_{2\cdot0})\mu^4 + (a_1q_{1\cdot0} + a_1q_{3\cdot0} - a_3q_{1\cdot0})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

$$q'_{3\cdot0\cdot0} = q'_{3\cdot0}\mu^3\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{3\cdot0} + (a_1q_{2\cdot0} + a_2q_{1\cdot0})\mu^2 + (a_1q_{4\cdot0} + a_2q_{5\cdot0} - a_4q_{1\cdot0} - a_5q_{2\cdot0})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$q'_{4\cdot0\cdot0} = q'_{4\cdot0}\mu^4 = \{(1+a_0\mu^2)q_{4\cdot0} + a_2q_{2\cdot0} + (a_2q_{6\cdot0} - a_6q_{2\cdot0})\mu^4 + (a_1q_{3\cdot0} + a_3q_{1\cdot0})\alpha^2\}\mu^4$$

$$q'_{5\cdot0\cdot0} = q'_{5\cdot0}\mu^4\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{5\cdot0} + a_2q_{3\cdot0} + a_3q_{2\cdot0} + (a_1q_{4\cdot0} + a_3q_{1\cdot0})\mu^2\}\mu^4\alpha$$

$$q'_{6\cdot0\cdot0} = q'_{6\cdot0}\mu^6 = \Big\{(1+a_0\mu^2)q_{6\cdot0} + a_2q_{4\cdot0} + a_4q_{2\cdot0} + a_3q_{3\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^6$$

$$q'_{-n\cdot0\cdot0} = -q'_{n\cdot0\cdot0}.$$

Tafel 3 (s. Seite 49).

$$p'_{0\cdot0\cdot0} = p'_{0\cdot0}\mu^2 = -2(1-\delta_2)\Big\{2b_2q_{2\cdot0} + b_1q_{1\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu} + 4b_4q_{4\cdot0}\mu^4 + 3b_3q_{3\cdot0}\alpha^2\Big\}\mu^2$$

$$p'_{1\cdot0\cdot0} = p'_{1\cdot0}\mu^2\alpha = -(1-\delta_2)\{b_1q_{2\cdot0} + (2b_2q_{1\cdot0} + 2b_2q_{3\cdot0} + 3b_3q_{2\cdot0})\mu + (3b_3q_{4\cdot0} + 4b_4q_{3\cdot0})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$p'_{2\cdot0\cdot0} = p'_{2\cdot0}\mu^2 = -(1-\delta_2)\Big\{2b_2q_{4\cdot0} + 4b_4q_{2\cdot0} + (-b_1q_{1\cdot0} + b_1q_{3\cdot0})\frac{\alpha^2}{\mu^2} + 3b_3q_{1\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^2$$

$$p'_{3\cdot0\cdot0} = p'_{3\cdot0}\mu^2\alpha = (1-\delta_2)\{b_1q_{2\cdot0} + 2b_2q_{1\cdot0}\mu - b_1q_{4\cdot0}\mu^2 - (2b_2q_{5\cdot0} + 4b_4q_{1\cdot0} + 5b_5q_{2\cdot0})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$p'_{4\cdot0\cdot0} = p'_{4\cdot0}\mu^4 = (1-\delta_2)\Big\{2b_2q_{2\cdot0} + b_1q_{3\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu} - (2b_2q_{6\cdot0} + 6b_6q_{2\cdot0})\mu^4 + 3b_3q_{1\cdot0}\alpha^2\Big\}\mu^4$$

$$p'_{5\cdot0\cdot0} = p'_{5\cdot0}\mu^4\alpha = (1-\delta_2)\{2b_2q_{3\cdot0} + 3b_3q_{2\cdot0} + b_1q_{4\cdot0}\mu + 4b_4q_{1\cdot0}\mu^2\}\mu^4\alpha$$

$$p'_{6\cdot0\cdot0} = p'_{6\cdot0}\mu^6 = (1-\delta_2)\Big\{2b_2q_{4\cdot0} + 4b_4q_{2\cdot0} + 3b_3q_{3\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^6$$

$$p'_{-n\cdot0\cdot0} = p'_{n\cdot0\cdot0}.$$

Tafel 4 (s. Seite 49).

$$
\begin{aligned}
t_{0\cdot0\cdot0} &= t_{0\cdot0}\mu^2 &&= \{p_{0\cdot0}+p'_{0\cdot0}\mu^2\}\mu^2 \\
t_{1\cdot0\cdot0} &= t_{1\cdot0}\mu^2\alpha &&= \{p_{1\cdot0}+p'_{1\cdot0}\mu\}\mu^2\alpha \qquad t_{4\cdot0\cdot0} = t_{4\cdot0}\mu^4 &&= \{p_{4\cdot0}+p'_{4\cdot0}\}\mu^4 \\
t_{2\cdot0\cdot0} &= t_{2\cdot0}\mu^2 &&= \{p_{2\cdot0}+p'_{2\cdot0}\mu^4\}\mu^2 \qquad t_{5\cdot0\cdot0} = t_{5\cdot0}\mu^4\alpha &&= \{p_{5\cdot0}+p'_{5\cdot0}\}\mu^4\alpha \\
t_{3\cdot0\cdot0} &= t_{3\cdot0}\mu^2\alpha &&= \{p_{3\cdot0}+p'_{3\cdot0}\mu\}\mu^2\alpha \qquad t_{6\cdot0\cdot0} = t_{6\cdot0}\mu^6 &&= \{p_{6\cdot0}+p'_{6\cdot0}\}\mu^6 \\
& & & t_{-n\cdot0\cdot0} = t_{n\cdot0\cdot0}.
\end{aligned}
$$

Tafel 5 (s. Seite 51).

$$
\begin{aligned}
r_{0\cdot i\cdot0} &= r_{0\cdot i}\mu^2 &&= \left\{-ib_0+\frac{i(i+1)}{2}d_0\mu^2-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_0\mu^4+\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{24}d''_0\mu^6\right\}\mu^2 \\
r_{1\cdot i\cdot0} &= r_{1\cdot i}\mu\alpha &&= \left\{-ib_1+\frac{i(i+1)}{2}d_1\mu^2-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_1\mu^4\right\}\mu\alpha \\
r_{2\cdot i\cdot0} &= r_{2\cdot i}\mu^2 &&= \left\{-ib_2+\frac{i(i+1)}{2}d_2\mu^2-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_2\mu^4+\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{24}d''_2\mu^6\right\}\mu^2 \\
r_{3\cdot i\cdot0} &= r_{3\cdot i}\mu^2\alpha &&= \left\{-ib_3+\frac{i(i+1)}{2}d_3\mu-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_3\mu^3\right\}\mu^2\alpha \\
r_{4\cdot i\cdot0} &= r_{4\cdot i}\mu^4 &&= \left\{-ib_4+\frac{i(i+1)}{2}d_4-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_4\mu^2+\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{24}d''_4\mu^4\right\}\mu^4 \\
r_{5\cdot i\cdot0} &= r_{5\cdot i}\mu^4\alpha &&= \left\{-ib_5+\frac{i(i+1)}{2}d_5-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_5\mu\right\}\mu^4\alpha \\
r_{6\cdot i\cdot0} &= r_{6\cdot i}\mu^6 &&= \left\{-ib_6+\frac{i(i+1)}{2}d_6-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_6+\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{24}d''_6\mu^2\right\}\mu^6 \\
r_{7\cdot i\cdot0} &= r_{7\cdot i}\mu^6\alpha &&= \left\{-ib_7+\frac{i(i+1)}{2}d_7-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_7\right\}\mu^6\alpha \\
r_{8\cdot i\cdot0} &= r_{6\cdot i}\mu^6 &&= \left\{-ib_8+\frac{i(i+1)}{2}d_6-\frac{i(i+1)(i+2)}{6}d'_6+\frac{i(i+1)(i+2)(i+3)}{24}d''_6\right\}\mu^6.
\end{aligned}
$$

Tafel 6 (s. Seite 52).

$$
\begin{aligned}
s_{0\cdot i\cdot0} &= s_{0\cdot i}\mu^2 &&= \{a_0+(1+a_0\mu^2)r_{0\cdot i}+2a_2r_{2\cdot i}\mu^2+2a_1r_{1\cdot i}\mu\alpha^2+2a_4r_{4\cdot i}\mu^6+2a_3r_{3\cdot i}\mu^2\alpha^2\}\mu^2 \\
s_{1\cdot i\cdot0} &= s_{1\cdot i}\mu\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)r_{1\cdot i}+a_1\mu+a_2r_{1\cdot i}\mu^2+(a_1r_{0\cdot i}+a_1r_{2\cdot i}+a_2r_{3\cdot i}+a_3r_{2\cdot i})\mu^3+(a_3r_{4\cdot i}+a_4r_{3\cdot i})\mu^5\}\mu\alpha \\
s_{2\cdot i\cdot0} &= s_{2\cdot i}\mu^2 &&= \{a_2+(1+a_0\mu^2)r_{2\cdot i}+a_2r_{0\cdot i}\mu^2+(a_2r_{4\cdot i}+a_4r_{2\cdot i})\mu^4+(a_1r_{1\cdot i}+a_3r_{1\cdot i})\mu\alpha^2+a_1r_{3\cdot i}\mu^2\alpha^2\}\mu^2 \\
s_{3\cdot i\cdot0} &= s_{3\cdot i}\mu^2\alpha &&= \{a_3+(1+a_0\mu^2)r_{3\cdot i}+a_2r_{1\cdot i}\mu+(a_1r_{2\cdot i}+a_3r_{0\cdot i})\mu^2+a_4r_{1\cdot i}\mu^3+(a_1r_{4\cdot i}+a_2r_{5\cdot i}+a_5r_{2\cdot i})\mu^4\}\mu^2\alpha \\
s_{4\cdot i\cdot0} &= s_{4\cdot i}\mu^4 &&= \left\{a_4+(1+a_0\mu^2)r_{4\cdot i}+a_2r_{2\cdot i}+a_4r_{0\cdot i}\mu^2+a_3r_{1\cdot i}\frac{\alpha^2}{\mu}+(a_2r_{6\cdot i}+a_6r_{2\cdot i})\mu^4+a_1r_{3\cdot i}\alpha^2\right\}\mu^4 \\
s_{5\cdot i\cdot0} &= s_{5\cdot i}\mu^4\alpha &&= \{a_5+(1+a_0\mu^2)r_{5\cdot i}+a_2r_{3\cdot i}+a_3r_{2\cdot i}+a_4r_{1\cdot i}\mu+(a_1r_{4\cdot i}+a_5r_{0\cdot i})\mu^2\}\mu^4\alpha \\
s_{6\cdot i\cdot0} &= s_{6\cdot i}\mu^6 &&= \left\{a_6+(1+a_0\mu^2)r_{6\cdot i}+a_2r_{4\cdot i}+a_4r_{2\cdot i}+a_6r_{0\cdot i}\mu^2+a_3r_{3\cdot i}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^6 \\
s_{7\cdot i\cdot0} &= s_{7\cdot i}\mu^6\alpha &&= \{a_7+r_{7\cdot i}+a_2r_{5\cdot i}+a_3r_{4\cdot i}+a_4r_{3\cdot i}+a_5r_{2\cdot i}\}\mu^6\alpha \\
s_{6\cdot i\cdot0} &= s_{6\cdot i}\mu^6 &&= \{a_6+r_{8\cdot i}+a_2r_{6\cdot i}+a_4r_{4\cdot i}+a_6r_{2\cdot i}\}\mu^6.
\end{aligned}
$$

Tafel 7 (s. Seite 60).

$$q_{0.1.0} = q_{0.1}\mu^4 = \Big\{ f_{0.2}A_{-2.8} + f'_{0.2}A_{2.8} + g_{0.2}A_{-2.7} + g'_{0.2}A_{2.7} + (h_{0.2}A_{-2.8} + h'_{0.2}A_{2.8})\mu^2 + (g_{0.1}A_{-1.7} + g'_{0.1}A_{1.7})\frac{\alpha^2}{\mu} + (k_2 A_{-2.9} + k'_2 A_{2.9})\mu^4 + (f_{0.1}A_{-1.8} + f'_{0.1}A_{1.8} + f_{0.3}A_{-3.6} + f'_{0.3}A_{3.8} + g_{0.3}A_{-3.7} + g'_{0.3}A_{3.7})\alpha^2 + (h_{0.1}A_{-1.8} + h'_{0.1}A_{1.8} + h_{0.3}A_{-3.8} + h'_{0.3}A_{3.8})\mu\alpha^2 \Big\}\mu^4$$

$$p_{-6.1.0} = p_{-6.1}\mu^6 = \{ f_{6.4}B_{-2.8} + g_{6.4}B_{-2.7} + h_{6.4}B_{-2.8} \}\mu^6$$

$$p_{-5.1.0} = p_{-5.1}\mu^4\alpha = \{ f_{5.2}B_{-3.8} + f_{5.3}B_{-2.6} + g_{5.2}B_{-3.7} + g_{5.3}B_{-2.7} + h_{5.3}B_{-2.8}\mu \}\mu^4\alpha$$

$$p_{-4.1.0} = p_{-4.1}\mu^4 = \Big\{ f_{4.2}B_{-2.6} + g_{4.2}B_{-2.7} + (f_{4.4}B_{0.8} + g_{4.4}B_{0.7} + h_{4.2}B_{-2.8} + h_{4.4}B_{0.8})\mu^2 + f_{4.0}B_{-4.8}\frac{\alpha^2}{\mu^2} + g_{4.1}B_{-3.7}\frac{\alpha^2}{\mu} \Big\}\mu^4$$

$$p_{-3.1.0} = p_{-3.1}\mu^2\alpha = \{ f_{3.0}B_{-3.6} + g_{3.1}B_{-2.7}\mu + (f_{3.1}B_{-2.8} + f_{3.2}B_{-1.8} + f_{3.3}B_{0.8} + g_{3.0}B_{-3.7} + g_{3.2}B_{-1.7} + g_{3.3}B_{0.7})\mu^2 + (h_{3.1}B_{-2.8} + h_{3.3}B_{0.8})\mu^3 \}\mu^2\alpha$$

$$p_{-2.1.0} = p_{-2.1}\mu^2 = \{ f_{2.0}B_{-2.6} + (f_{2.2}B_{0.6} + g_{2.0}B_{-2.7} + g_{2.2}B_{0.7})\mu^2 + (f_{2.4}B_{3.6} + g_{2.4}B_{2.7} + h_{2.0}B_{-2.8} + h_{2.2}B_{0.8} + h_{2.4}B_{2.8})\mu^4 + (g'_{2.1}B_{-3.7} + g_{2.1}B_{-1.7})\mu\alpha^2 + (k_0 B_{-2.9} + k_2 B_{0.9} + k_4 B_{2.9})\mu^3 + (f'_{2.1}B_{-3.8} + f'_{2.2}B_{-4.6} + f_{2.1}B_{-1.6} + f_{2.3}B_{1.6} + g'_{2.2}B_{-4.7} + g_{2.3}B_{1.7})\mu^2\alpha^2 \}\mu^2$$

$$p_{-1.1.0} = p_{-1.1}\mu^2\alpha = \{ f_{1.0}B_{-1.6} + (g'_{1.1}B_{-2.7} + g_{1.1}B_{0.7})\mu + (f'_{1.1}B_{-2.8} + f_{1.1}B_{0.8} + f'_{1.2}B_{-3.6} + f_{1.2}B_{1.6} + f_{1.3}B_{2.8} + g_{1.0}B_{-1.7} + g'_{1.2}B_{-3.7} + g_{1.2}B_{1.7} + g_{1.3}B_{2.7})\mu^2 + (h'_{1.1}B_{-2.8} + h_{1.1}B_{0.8} + h_{1.3}B_{2.8})\mu^3 + (f_{1.4}B_{3.6} + g_{1.4}B_{3.7} + h_{1.0}B_{-1.8} + h'_{1.2}B_{-3.8} + h_{1.2}B_{1.8} + h_{1.4}B_{3.8})\mu^4 + (k_1 B_{-2.9} + k'_1 B_{0.9} + k_3 B_{2.9})\mu^5 \}\mu^2\alpha$$

$$p_{0.1.0} = p_{0.1}\mu^2 = \{ f_{0.0}B_{0.6} + (f_{0.2}B_{-2.8} + f'_{0.2}B_{2.6} + g_{0.0}B_{0.7} + g_{0.2}B_{-2.7} + g'_{0.2}B_{2.7})\mu^2 + (h_{0.0}B_{0.8} + h_{0.2}B_{-2.8} + h'_{0.2}B_{2.8})\mu^4 + (g_{0.1}B_{-1.7} + g'_{0.1}B_{1.7})\mu\alpha^2 + (k_0 B_{0.9} + k_2 B_{-2.9} + k'_2 B_{2.9})\mu^5 + (f_{0.1}B_{-1.8} + f'_{0.1}B_{1.8} + f_{0.3}B_{-3.8} + f'_{0.3}B_{3.6} + g_{0.3}B_{-3.7} + g'_{0.3}B_{3.7})\mu^2\alpha^2 + (h_{0.1}B_{-1.8} + h'_{0.1}B_{1.8} + h_{0.3}B_{-3.8} + h'_{0.3}B_{3.8})\mu^3\alpha^2 \}\mu^2$$

$$p_{1.1.0} = p_{1.1}\mu^2\alpha = \{ f_{1.0}B_{1.8} + (g_{1.1}B_{0.7} + g'_{1.1}B_{2.7})\mu + (f_{1.1}B_{0.8} + f'_{1.1}B_{2.8} + f_{1.2}B_{-1.6} + f'_{1.2}B_{3.8} + f_{1.3}B_{-2.6} + g_{1.0}B_{1.7} + g_{1.2}B_{-1.7} + g'_{1.2}B_{3.7} + g_{1.3}B_{-2.7})\mu^2 + (h_{1.1}B_{0.8} + h'_{1.1}B_{2.8} + h_{1.3}B_{-2.8})\mu^3 \}\mu^2\alpha$$

$$p_{2.1.0} = p_{2.1}\mu^2 = \{ f_{2.0}B_{2.6} + (f_{2.2}B_{0.6} + g_{2.0}B_{2.7} + g_{2.2}B_{0.7})\mu^2 + (f_{2.4}B_{-2.6} + g_{2.4}B_{-2.7} + h_{2.0}B_{2.8} + h_{2.2}B_{0.8} + h_{2.4}B_{-2.8})\mu^4 + (g_{2.1}B_{1.7} + g'_{2.1}B_{3.7})\mu\alpha^2 \}\mu^2$$

$$p_{3\cdot1\cdot0} = p_{3\cdot1}\mu^2\alpha = \{f_{3\cdot0}B_{3\cdot6}+g_{3\cdot1}B_{2\cdot7}\mu+(f_{3\cdot1}B_{2\cdot6}+f_{3\cdot2}B_{1\cdot6}+f_{3\cdot3}B_{0\cdot6}+g_{3\cdot0}B_{3\cdot7}+g_{3\cdot2}B_{1\cdot7}+g_{3\cdot3}B_{0\cdot7})\mu^2+(h_{3\cdot1}B_{2\cdot6}+h_{3\cdot3}B_{0\cdot8})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$p_{4\cdot1\cdot0} = p_{4\cdot1}\mu^4 = \Big\{f_{4\cdot2}B_{2\cdot6}+g_{4\cdot2}B_{2\cdot7}+(f_{4\cdot4}B_{0\cdot6}+g_{4\cdot4}B_{0\cdot7}+h_{4\cdot2}B_{2\cdot6}+h_{4\cdot4}B_{0\cdot6})\mu^2+f_{4\cdot0}B_{4\cdot6}\frac{\alpha^2}{\mu^2}+g_{4\cdot1}B_{3\cdot7}\frac{\alpha^2}{\mu}\Big\}\mu^4$$

$$p_{5\cdot1\cdot0} = p_{5\cdot1}\mu^4\alpha = \{f_{5\cdot2}B_{3\cdot6}+f_{5\cdot3}B_{2\cdot6}+g_{5\cdot2}B_{3\cdot7}+g_{5\cdot6}B_{2\cdot7}+h_{5\cdot3}B_{2\cdot6}\mu\}\mu^4\alpha$$

$$p_{6\cdot1\cdot0} = p_{6\cdot1}\mu^6 = \{f_{6\cdot4}B_{2\cdot6}+g_{6\cdot4}B_{2\cdot7}+h_{6\cdot4}B_{2\cdot6}\}\mu^6$$

$$q_{-1\cdot0\cdot1} = q_{-1\cdot2}\mu^4 = \Big\{f'_{1\cdot2}A_{-3\cdot11}+f_{1\cdot2}A_{1\cdot11}+g'_{1\cdot2}A_{-3\cdot12}+g_{1\cdot2}A_{1\cdot12}+(h'_{1\cdot2}A_{-3\cdot13}+h_{1\cdot2}A_{1\cdot13})\mu^2+(g'_{1\cdot1}A_{-2\cdot12}+g_{1\cdot1}A_{0\cdot12})\frac{\alpha^2}{\mu}+(k_2A_{1\cdot14}+k'_2A_{-3\cdot14})\mu^4+(f'_{1\cdot1}A_{-2\cdot11}+f_{1\cdot1}A_{0\cdot11}+f'_{1\cdot3}A_{-4\cdot11}+f_{1\cdot3}A_{2\cdot11}+g'_{1\cdot3}A_{-4\cdot12}+g_{1\cdot3}A_{2\cdot12})\alpha^2+(h'_{1\cdot1}A_{-2\cdot13}+h_{1\cdot1}A_{0\cdot13}+h'_{1\cdot3}A_{-4\cdot13}+h_{1\cdot3}A_{2\cdot13})\mu\alpha^2\Big\}\mu^4$$

$$p_{-7\cdot0\cdot1} = p_{-7\cdot2}\mu^6 = \{f_{7\cdot4}B_{-3\cdot11}+g_{7\cdot4}B_{-3\cdot12}+h_{7\cdot4}B_{-3\cdot13}\}\mu^6$$

$$p_{-6\cdot0\cdot1} = p_{-6\cdot2}\mu^4\alpha = \{f_{6\cdot2}B_{-4\cdot11}+f_{6\cdot3}B_{-3\cdot11}+g_{6\cdot2}B_{-4\cdot12}+g_{6\cdot3}B_{-3\cdot12}+h_{6\cdot3}B_{-3\cdot13}\mu\}\mu^4\alpha$$

$$p_{-5\cdot0\cdot1} = p_{-5\cdot2}\mu^4 = \Big\{f_{5\cdot2}B_{-6\cdot11}+g_{5\cdot2}B_{-3\cdot12}+(f_{5\cdot4}B_{-1\cdot11}+g_{5\cdot4}B_{-1\cdot12}+h_{5\cdot2}B_{-3\cdot13}+h_{5\cdot4}B_{-1\cdot13})\mu^2+f_{5\cdot0}B_{-5\cdot11}\frac{\alpha^2}{\mu^2}+g_{5\cdot1}B_{-4\cdot12}\frac{\alpha^2}{\mu}\Big\}\mu^4$$

$$p_{-4\cdot0\cdot1} = p_{-4\cdot2}\mu^2\alpha = \{f_{4\cdot0}B_{-4\cdot11}+g_{4\cdot1}B_{-3\cdot12}\mu+(f_{4\cdot1}B_{-3\cdot11}+f_{4\cdot2}B_{-2\cdot11}+f_{4\cdot3}B_{-1\cdot11}+g_{4\cdot0}B_{-4\cdot12}+g_{4\cdot2}B_{-2\cdot12}+g_{4\cdot3}B_{-1\cdot13})\mu^2+(h_{4\cdot1}B_{-3\cdot13}+h_{4\cdot3}B_{-1\cdot13})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$p_{-3\cdot0\cdot1} = p_{-3\cdot2}\mu^2 = \{f_{3\cdot0}B_{-3\cdot11}+(f_{6\cdot2}B_{-1\cdot11}+g_{3\cdot0}B_{-3\cdot12}+g_{3\cdot2}B_{-1\cdot12})\mu^2+(f_{3\cdot4}B_{1\cdot11}+g_{3\cdot4}B_{1\cdot12}+h_{3\cdot0}B_{-3\cdot13}+h_{3\cdot2}B_{-1\cdot12}+h_{3\cdot4}B_{1\cdot13})\mu^4+(g'_{3\cdot1}B_{-4\cdot12}+g_{3\cdot1}B_{-2\cdot12})\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$p_{-2\cdot0\cdot1} = p_{-2\cdot2}\mu^2\alpha = \{f_{2\cdot0}B_{-2\cdot11}+(g'_{2\cdot1}B_{-3\cdot13}+g_{2\cdot1}B_{-1\cdot12})\mu+(f'_{2\cdot1}B_{-3\cdot11}+f_{2\cdot1}B_{-1\cdot11}+f'_{2\cdot2}B_{-4\cdot11}+f_{2\cdot2}B_{0\cdot11}+f_{2\cdot6}B_{1\cdot11}+g_{2\cdot0}B_{-2\cdot12}+g'_{2\cdot2}B_{-4\cdot12}+g_{2\cdot2}B_{0\cdot12}+g_{2\cdot3}B_{1\cdot12})\mu^2+(h'_{2\cdot1}B_{-3\cdot13}+h_{2\cdot1}B_{-1\cdot13}+h_{2\cdot3}B_{1\cdot13})\mu^3+(f_{2\cdot4}B_{2\cdot11}+g_{2\cdot4}B_{2\cdot12}+h_{2\cdot0}B_{-2\cdot13}+h'_{2\cdot2}B_{-4\cdot13}+h_{2\cdot2}B_{0\cdot13}+h_{2\cdot4}B_{2\cdot13})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$p_{-1\cdot0\cdot1} = p_{-1\cdot2}\mu^2 = \{f_{1\cdot0}B_{-1\cdot11}+(f'_{1\cdot2}B_{-3\cdot11}+f_{1\cdot2}B_{1\cdot11}+g_{1\cdot0}B_{-1\cdot12}+g'_{1\cdot2}B_{-3\cdot12}+g_{1\cdot2}B_{1\cdot12})\mu^2+(h_{1\cdot0}B_{-1\cdot13}+h'_{1\cdot2}B_{-3\cdot13}+h_{1\cdot2}B_{1\cdot13})\mu^4+(g'_{1\cdot1}B_{-2\cdot12}+g_{1\cdot1}B_{0\cdot12})\mu\alpha^2+(k_0B_{-1\cdot14}+k_2B_{1\cdot14}+k'_2B_{-3\cdot14})\mu^6+(f'_{1\cdot1}B_{-2\cdot11}+f_{1\cdot1}B_{0\cdot11}+f'_{1\cdot3}B_{-4\cdot11}+f_{1\cdot3}B_{2\cdot11}+g'_{1\cdot3}B_{-4\cdot12}+g_{1\cdot3}B_{2\cdot12})\mu^2\alpha^2+(h'_{1\cdot1}B_{-2\cdot13}+h_{1\cdot1}B_{0\cdot13}+h'_{1\cdot3}B_{-4\cdot13}+h_{1\cdot3}B_{2\cdot13})\mu^3\alpha^2\}\mu^2$$

$$p_{0\cdot 0\cdot 1} = p_{0\cdot 2}\mu^2\alpha = \{f_{0\cdot 0}B_{0\cdot 11} + (g_{0\cdot 1}B_{-1\cdot 12} + g'_{0\cdot 1}B_{1\cdot 12})\mu + (f_{0\cdot 1}B_{-1\cdot 11} + f'_{0\cdot 1}B_{1\cdot 11} + f_{0\cdot 2}B_{-2\cdot 11} + f'_{0\cdot 2}B_{2\cdot 11} + f_{0\cdot 3}B_{-3\cdot 11} + g_{0\cdot 0}B_{0\cdot 12} + g_{0\cdot 2}B_{-2\cdot 12} + g'_{0\cdot 2}B_{2\cdot 12} + g_{0\cdot 3}B_{-3\cdot 12})\mu^2 + h_{0\cdot 1}B_{-1\cdot 13} + h'_{0\cdot 1}B_{1\cdot 13} + h_{0\cdot 3}B_{-3\cdot 13})\mu^3 + (f_{0\cdot 4}B_{-4\cdot 11} + g_{0\cdot 4}B_{-4\cdot 12} + h_{0\cdot 0}B_{0\cdot 13} + h_{0\cdot 2}B_{-2\cdot 13} + h'_{0\cdot 2}B_{2\cdot 13} + h_{0\cdot 4}B_{-4\cdot 13})\mu^4 + (k_1B_{-1\cdot 14} + k'_1B_{1\cdot 14} + k_3B_{-3\cdot 14})\mu^5\}\mu^2\alpha$$

$$p_{1\cdot 0\cdot 1} = p_{1\cdot 2}\mu^2 = \{f_{1\cdot 0}B_{1\cdot 11} + (f_{1\cdot 2}B_{-1\cdot 11} + g_{1\cdot 0}B_{1\cdot 12} + g_{1\cdot 2}B_{-1\cdot 12})\mu^2 + (f_{1\cdot 4}B_{-3\cdot 11} + g_{1\cdot 4}B_{-3\cdot 12} + h_{1\cdot 0}B_{1\cdot 13} + h_{1\cdot 2}B_{-1\cdot 13} + h_{1\cdot 4}B_{-3\cdot 13})\mu^4 + (g_{1\cdot 1}B_{0\cdot 12} + g'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 12})\mu\alpha^2\}\mu^2$$

$$p_{2\cdot 0\cdot 1} = p_{2\cdot 2}\mu^2\alpha = \{f_{2\cdot 0}B_{2\cdot 11} + g_{2\cdot 1}B_{1\cdot 12}\mu + (f_{2\cdot 1}B_{1\cdot 11} + f_{2\cdot 2}B_{0\cdot 11} + f_{2\cdot 3}B_{-1\cdot 11} + g_{2\cdot 0}B_{2\cdot 12} + g_{2\cdot 2}B_{0\cdot 12} + g_{2\cdot 3}B_{-1\cdot 12})\mu^2 + (h_{2\cdot 1}B_{1\cdot 13} + h_{2\cdot 3}B_{-1\cdot 13})\mu^3\}\mu^2\alpha$$

$$p_{3\cdot 0\cdot 1} = p_{3\cdot 2}\mu^4 = \left\{f_{3\cdot 2}B_{1\cdot 11} + g_{3\cdot 2}B_{1\cdot 12} + (f_{3\cdot 4}B_{-1\cdot 11} + g_{3\cdot 4}B_{-1\cdot 12} + h_{3\cdot 2}B_{1\cdot 13} + h_{3\cdot 4}B_{-1\cdot 13})\mu^2 + f_{3\cdot 0}B_{3\cdot 11}\frac{\alpha^2}{\mu^2} + g_{3\cdot 1}B_{2\cdot 12}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$p_{4\cdot 0\cdot 1} = p_{4\cdot 2}\mu^4\alpha = \{f_{4\cdot 2}B_{2\cdot 11} + f_{4\cdot 3}B_{1\cdot 11} + g_{4\cdot 2}B_{2\cdot 12} + g_{4\cdot 3}B_{1\cdot 12} + h_{4\cdot 3}B_{1\cdot 13}\mu\}\mu^4\alpha$$

$$p_{5\cdot 0\cdot 1} = p_{5\cdot 2}\mu^6 = \{f_{5\cdot 4}B_{1\cdot 11} + g_{5\cdot 4}B_{1\cdot 12} + h_{5\cdot 4}B_{1\cdot 13}\}\mu^6$$

$$q^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0$$

$$p^{1\cdot 0}_{0\cdot 0\cdot 0} = p_{0\cdot 3}\mu^2 = \{f_{0\cdot 0}B_{0\cdot 1} + (2f_{0\cdot 2}B_{2\cdot 1} + 2g_{0\cdot 0}B_{0\cdot 2} + 4g_{0\cdot 2}B_{2\cdot 2})\mu^2 + (3h_{0\cdot 0}B_{0\cdot 3} + 6h_{0\cdot 2}B_{2\cdot 3})\mu^4 + 4g_{0\cdot 1}B_{1\cdot 2}\mu\alpha^2 + (4k_0B_{0\cdot 4} + 8k_2B_{2\cdot 4})\mu^6 + (2f_{0\cdot 1}B_{1\cdot 1} + 2f_{0\cdot 3}B_{3\cdot 1} + 4g_{0\cdot 3}B_{3\cdot 2})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

$$p^{1\cdot 0}_{1\cdot 0\cdot 0} = p_{1\cdot 3}\mu^2\alpha = \{f_{1\cdot 0}B_{1\cdot 1} + (2g_{1\cdot 1}B_{0\cdot 2} + 2g'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 2})\mu + (f_{1\cdot 1}B_{0\cdot 1} + f'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 1} \pm f_{1\cdot 2}B_{1\cdot 1} + f'_{1\cdot 2}B_{3\cdot 1} \pm f_{1\cdot 3}B_{2\cdot 1} + 2g_{1\cdot 0}B_{1\cdot 2} \pm 2g_{1\cdot 2}B_{1\cdot 2} + 2g'_{1\cdot 2}B_{3\cdot 2} \pm 2g_{1\cdot 3}B_{2\cdot 2})\mu^2 + (3h_{1\cdot 1}B_{0\cdot 3} + 3h'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 3} \pm 3h_{1\cdot 3}B_{2\cdot 3})\mu^3 + (\pm f_{1\cdot 4}B_{3\cdot 1} \pm 2g_{1\cdot 4}B_{3\cdot 2} + 3h_{1\cdot 0}B_{1\cdot 3} \pm 3h_{1\cdot 2}B_{1\cdot 3} + 3h'_{1\cdot 2}B_{3\cdot 3} \pm 3h_{1\cdot 4}B_{3\cdot 3})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$p^{1\cdot 0}_{2\cdot 0\cdot 0} = p_{2\cdot 3}\mu^2 = \{f_{2\cdot 0}B_{2\cdot 1} + (f_{2\cdot 2}B_{0\cdot 1} + 2g_{2\cdot 0}B_{2\cdot 2} + 2g_{2\cdot 2}B_{0\cdot 2})\mu^2 + (\pm f_{2\cdot 4}B_{2\cdot 1} \pm 2g_{2\cdot 4}B_{2\cdot 2} + 3h_{2\cdot 0}B_{2\cdot 3} + 3h_{2\cdot 2}B_{0\cdot 3} \pm 3h_{2\cdot 4}B_{2\cdot 3})\mu^4 + (2g_{2\cdot 1}B_{1\cdot 2} + 2g'_{2\cdot 1}B_{3\cdot 2})\mu\alpha^2 + (4k_0B_{2\cdot 4} + 4k_2B_{0\cdot 4} \pm 4k_4B_{2\cdot 4})\mu^6 + (f_{2\cdot 1}B_{1\cdot 1} + f'_{2\cdot 1}B_{3\cdot 1} + f'_{2\cdot 2}B_{4\cdot 1} \pm f_{2\cdot 3}B_{1\cdot 1} + 2g'_{2\cdot 2}B_{4\cdot 2} \pm 2g_{2\cdot 3}B_{1\cdot 2})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

$$p^{1\cdot 0}_{3\cdot 0\cdot 0} = p_{3\cdot 3}\mu^2\alpha = \{f_{3\cdot 0}B_{3\cdot 1} + 2g_{3\cdot 1}B_{2\cdot 2}\mu + (f_{3\cdot 1}B_{2\cdot 1} + f_{3\cdot 2}B_{1\cdot 1} + f_{3\cdot 3}B_{0\cdot 1} + 2g_{3\cdot 0}B_{3\cdot 2} + 2g_{3\cdot 2}B_{1\cdot 2} + 2g_{3\cdot 3}B_{0\cdot 2})\mu^2 + (3h_{3\cdot 1}B_{2\cdot 3} + 3h_{3\cdot 3}B_{0\cdot 3})\mu^3 + (\pm f_{3\cdot 4}B_{1\cdot 1} \pm f_{3\cdot 5}B_{2\cdot 1} \pm 2g_{3\cdot 4}B_{1\cdot 2} \pm 2g_{3\cdot 5}B_{2\cdot 2} + 3h_{3\cdot 0}B_{3\cdot 3} + 3h_{3\cdot 2}B_{1\cdot 3} \pm 3h_{3\cdot 4}B_{1\cdot 3} \pm 3h_{3\cdot 5}B_{2\cdot 3})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$p^{1\cdot 0}_{4\cdot 0\cdot 0} = p_{4\cdot 3}\mu^4 = \Big\{f_{4\cdot 2}B_{2\cdot 1} + 2g_{4\cdot 2}B_{2\cdot 2} + (f_{4\cdot 4}B_{0\cdot 1} + 2g_{4\cdot 4}B_{0\cdot 2} + 3h_{4\cdot 2}B_{2\cdot 3} + 3h_{4\cdot 4}B_{0\cdot 3})\mu^2 + f_{4\cdot 0}B_{4\cdot 1}\frac{\alpha^2}{\mu^2} + 2g_{4\cdot 1}B_{3\cdot 2}\frac{\alpha^2}{\mu} + (\pm f_{4\cdot 6}B_{2\cdot 1} \pm 2g_{4\cdot 6}B_{2\cdot 2} \pm 3h_{4\cdot 6}B_{2\cdot 3} + 4k_2B_{2\cdot 4} + 4k_4B_{0\cdot 4} \pm 4k_6B_{2\cdot 4})\mu^4 + (f_{4\cdot 1}B_{3\cdot 1} + f_{4\cdot 3}B_{1\cdot 1} + 2g_{4\cdot 0}B_{4\cdot 2} + 2g_{4\cdot 3}B_{1\cdot 2})\alpha^2\Big\}\mu^4$$

$$p^{1\cdot 0}_{5\cdot 0\cdot 0} = p_{5\cdot 3}\mu^4\alpha = \Big\{f_{5\cdot 2}B_{3\cdot 1} + f_{5\cdot 3}B_{2\cdot 1} + 2g_{5\cdot 2}B_{3\cdot 2} + 2g_{5\cdot 3}B_{2\cdot 2} + 3h_{5\cdot 3}B_{2\cdot 3}\mu + (f_{5\cdot 4}B_{1\cdot 1} + f_{5\cdot 5}B_{0\cdot 1} + 2g_{5\cdot 4}B_{1\cdot 2} + 2g_{5\cdot 5}B_{0\cdot 2} + 3h_{5\cdot 2}B_{3\cdot 3} + 3h_{5\cdot 4}B_{1\cdot 3} + 3h_{5\cdot 5}B_{0\cdot 3})\mu^2 + f_{5\cdot 0}B_{5\cdot 1}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^4\alpha$$

$$p^{1\cdot 0}_{6\cdot 0\cdot 0} = p_{6\cdot 3}\mu^6 = \Big\{f_{6\cdot 4}B_{2\cdot 1} + 2g_{6\cdot 4}B_{2\cdot 2} + 3h_{6\cdot 4}B_{2\cdot 3} + (f_{6\cdot 6}B_{0\cdot 1} + 2g_{6\cdot 6}B_{0\cdot 2} + 3h_{6\cdot 6}B_{0\cdot 3} + 4k_4B_{2\cdot 4} + 4k_6B_{0\cdot 4})\mu^2 + (f_{6\cdot 2}B_{4\cdot 1} + f_{6\cdot 3}B_{3\cdot 1} + 2g_{6\cdot 2}B_{4\cdot 2} + 2g_{6\cdot 3}B_{3\cdot 2})\frac{\alpha^2}{\mu^2}\Big\}\mu^6$$

$$q^{1\cdot 0}_{-n\cdot 0\cdot 0} = -q^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}, \qquad p^{1\cdot 0}_{-n\cdot 0\cdot 0} = p^{1\cdot 0}_{n\cdot 0\cdot 0}$$

$$q^{0\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 0} = q_{0\cdot 4}\mu^5 = -\Big\{4f_{0\cdot 2}A_{2\cdot 0} + 4g_{0\cdot 2}A_{2\cdot 1} + 4h_{0\cdot 2}A_{2\cdot 2}\mu^2 + 2g_{0\cdot 1}A_{1\cdot 1}\frac{\alpha^2}{\mu} + 4k_2'A_{2\cdot 3}\mu^4\Big\}\mu^5$$

$$p^{0\cdot 1}_{0\cdot 0\cdot 0} = 0$$

$$p^{0\cdot 1}_{1\cdot 0\cdot 0} = p_{1\cdot 4}\mu^3\alpha = \{\pm f_{1\cdot 0}B_{1\cdot 0} \pm 2g'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 1}\mu + (-f_{1\cdot 2}B_{1\cdot 0} \pm 2f'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 0} \pm 3f'_{1\cdot 2}B_{3\cdot 0} - 2f_{1\cdot 3}B_{2\cdot 0} \pm g_{1\cdot 0}B_{1\cdot 1} - g_{1\cdot 2}B_{1\cdot 1} \pm 3g'_{1\cdot 2}B_{3\cdot 1} - 2g_{1\cdot 3}B_{1\cdot 2})\mu^2 + (-2h_{1\cdot 3}B_{2\cdot 2} \pm 2h'_{1\cdot 1}B_{2\cdot 2})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$p^{0\cdot 1}_{2\cdot 0\cdot 0} = p_{2\cdot 4}\mu^3 = \{\pm 2f_{2\cdot 0}B_{2\cdot 0} \pm 2g_{2\cdot 0}B_{2\cdot 1}\mu^2 + (-2f_{2\cdot 4}B_{2\cdot 0} - 2g_{2\cdot 4}B_{2\cdot 1} \pm 2h_{2\cdot 0}B_{2\cdot 2} - 2h_{2\cdot 4}B_{2\cdot 2})\mu^4 \pm (g_{2\cdot 1}B_{1\cdot 1} + 3g'_{2\cdot 1}B_{3\cdot 1})\mu\alpha^2 + (\pm 2k_0B_{2\cdot 3} - 2k_4B_{2\cdot 3})\mu^6\}\mu^3$$

$$p^{0\cdot 1}_{3\cdot 0\cdot 0} = p_{3\cdot 4}\mu^3\alpha = \pm\{3f_{3\cdot 0}B_{3\cdot 0} + 2g_{3\cdot 1}B_{2\cdot 1}\mu + (2f_{3\cdot 1}B_{2\cdot 0} + f_{3\cdot 2}B_{1\cdot 0} + 3g_{3\cdot 0}B_{3\cdot 1} + g_{3\cdot 2}B_{1\cdot 1})\mu^2 + 2h_{3\cdot 1}B_{2\cdot 2}\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$p^{0\cdot 1}_{4\cdot 0\cdot 0} = p_{4\cdot 4}\mu^5 = \Big\{\pm 2f_{4\cdot 2}B_{2\cdot 0} \pm 2g_{4\cdot 2}B_{2\cdot 1} \pm 2h_{4\cdot 2}B_{2\cdot 2}\mu^2 \pm 4f_{4\cdot 0}B_{4\cdot 0}\frac{\alpha^2}{\mu^2} \pm 3g_{4\cdot 1}B_{3\cdot 1}\frac{\alpha^2}{\mu} + (-2f_{4\cdot 6}B_{2\cdot 0} - 2g_{4\cdot 6}B_{2\cdot 1} - 2h_{4\cdot 6}B_{2\cdot 2} \pm 2k_2B_{2\cdot 3} - 2k_6B_{2\cdot 3})\mu^4\Big\}\mu^5$$

$$p^{0\cdot 1}_{5\cdot 0\cdot 0} = p_{5\cdot 4}\mu^5\alpha = \pm\{3f_{5\cdot 2}B_{3\cdot 0} + 2f_{5\cdot 3}B_{2\cdot 0} + 3g_{5\cdot 2}B_{3\cdot 1} + 2g_{5\cdot 3}B_{2\cdot 1} + 2h_{5\cdot 3}B_{2\cdot 2}\mu\}\mu^5\alpha$$

$$p^{0\cdot 1}_{6\cdot 0\cdot 0} = p_{6\cdot 4}\mu^7 = \pm\{2f_{6\cdot 4}B_{2\cdot 0} + 2g_{6\cdot 4}B_{2\cdot 1} + 2h_{6\cdot 4}B_{2\cdot 2} + 2k_4B_{2\cdot 3}\mu^2\}\mu^7$$

$$q^{0\cdot 1}_{-n\cdot 0\cdot 0} = q^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}, \qquad p^{0\cdot 1}_{-n\cdot 0\cdot 0} = -p^{0\cdot 1}_{n\cdot 0\cdot 0}.$$

Tafel 8 (s. Seite 60).

$$
\begin{aligned}
q'_{-6.1.0} &= q'_{-6.1}\mu^6 &&= \{q_{-6.1} + a_2 q_{-4.1} + a_4 q_{-2.1}\}\mu^6\\
q'_{-5.1.0} &= q'_{-5.1}\mu^4\alpha &&= \{q_{-5.1} + a_2 q_{-3.1} + a_3 q_{-2.1}\}\mu^4 a\\
q'_{-4.1.0} &= q'_{-4.1}\mu^4 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-4.1} + a_2 q_{-2.1}\}\mu^4\\
q'_{-3.1.0} &= q'_{-3.1}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-3.1} + (a_1 q_{-2.1} + a_2 q_{-1.1})\mu^2\}\mu^2\alpha\\
q'_{-2.1.0} &= q'_{-2.1}\mu^2 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-2.1} + (a_2 q_{-4.1} + a_2 q_{0.1} + a_4 q_{2.1})\mu^4\\
&&&\quad + (a_1 q_{-3.1} + a_1 q_{-1.1} + a_3 q_{1.1})\mu^2\alpha^2\}\mu^2\\
q'_{-1.1.0} &= q'_{-1.1}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-1.1} + (a_1 q_{-2.1} + a_2 q_{-3.1} + a_2 q_{1.1} + a_3 q_{2.1})\mu^2\\
&&&\quad + (a_3 q_{-4.1} + a_1 q_{0.1} + a_4 q_{3.1})\mu^4\}\mu^2\alpha\\
q'_{0.1.0} &= q'_{0.1}\mu^4 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{0.1} + a_2(q_{-2.1} + q_{2.1}) + a_4(q_{-4.1} + q_{4.1})\mu^4\\
&&&\quad + (a_1(q_{-1.1} + q_{1.1}) + a_3(q_{-3.1} + q_{3.1}))\alpha^2\}\mu^4\\
q'_{1.1.0} &= q'_{1.1}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{1.1} + (a_1 q_{2.1} + a_2 q_{-1.1} + a_2 q_{3.1} + a_3 q_{-2.1})\mu^2\}\mu^2\alpha\\
q'_{2.1.0} &= q'_{2.1}\mu^2 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{2.1} + (a_2 q_{0.1} + a_2 q_{4.1} + a_4 q_{-2.1})\mu^4\}\mu^2\\
q'_{3.1.0} &= q'_{3.1}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{3.1} + (a_1 q_{2.1} + a_2 q_{1.1})\mu^2\}\mu^2\alpha\\
q'_{4.1.0} &= q'_{4.1}\mu^4 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{4.1} + (a_2 q_{2.1}\}\mu^4\\
q'_{5.1.0} &= q'_{5.1}\mu^4\alpha &&= \{q_{5.1} + a_2 q_{3.1} + a_3 q_{2.1}\}\mu^4\alpha\\
q'_{6.1.0} &= q'_{6.1}\mu^6 &&= \{q_{6.1} + a_2 q_{4.1} + a_4 q_{2.1}\}\mu^6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_{-7.0.1} &= q'_{-7.2}\mu^6 &&= \{q_{-7.2} + a_2 q_{-5.2} + a_4 q_{-3.2}\}\mu^6\\
q'_{-6.0.1} &= q'_{-6.2}\mu^4\alpha &&= \{q_{-6.2} + a_2 q_{-4.2} + a_3 q_{-3.2}\}\mu^4\alpha\\
q'_{-5.0.1} &= q'_{-5.2}\mu^4 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-5.2} + a_2 q_{-3.2}\}\mu^4\\
q'_{-4.0.1} &= q'_{-4.2}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-4.2} + (a_1 q_{-3.2} + a_2 q_{-2.2})\mu^2\}\mu^2\alpha\\
q'_{-3.0.1} &= q'_{-3.2}\mu^2 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-3.2} + (a_2 q_{-5.2} + a_2 q_{-1.2} + a_4 q_{1.2})\mu^4\}\mu^2\\
q'_{-2.0.1} &= q'_{-2.2}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-2.2} + (a_1 q_{-3.2} + a_3 q_{-4.2} + a_2 q_{0.2} + a_3 q_{1.2})\mu^2\\
&&&\quad + (a_1 q_{-1.2} + a_3 q_{-5.2} + a_4 q_{2.2})\mu^4\}\mu^2\alpha\\
q'_{-1.0.1} &= q'_{-1.2}\mu^4 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{-1.2} + a_2(q_{-3.2} + q_{1.2}) + a_4(q_{-5.2} + q_{3.2})\mu^4\\
&&&\quad + (a_1(q_{-2.2} + q_{0.2}) + a_3(q_{-4.2} + q_{2.2}))\alpha^2\}\mu^4\\
q'_{0.0.1} &= q'_{0.2}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{0.2} + (a_1 q_{1.2} + a_2 q_{-2.2} + a_2 q_{2.2} + a_3 q_{-3.2})\mu^2\\
&&&\quad + (a_1 q_{-1.2} + a_3 q_{3.2} + a_4 q_{-4.2})\mu^4\}\mu^2\alpha\\
q'_{1.0.1} &= q'_{1.2}\mu^2 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{1.2} + (a_2 q_{-1.2} + a_2 q_{3.2} + a_4 q_{-3.2})\mu^4\}\mu^2\\
q'_{2.0.1} &= q'_{2.2}\mu^2\alpha &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{2.2} + (a_1 q_{1.2} + a_2 q_{0.2})\mu^2\}\mu^2\alpha\\
q'_{3.0.1} &= q'_{3.2}\mu^4 &&= \{(1+a_0\mu^2)q_{3.2} + a_2 q_{1.2}\}\mu^4\\
q'_{4.0.1} &= q'_{4.2}\mu^4\alpha &&= \{q_{4.2} + a_2 q_{2.2} + a_3 q_{1.2}\}\mu^4\alpha\\
q'_{5.0.1} &= q'_{5.2}\mu^6 &&= \{q_{5.2} + a_2 q_{3.2} + a_4 q_{1.2}\}\mu^6
\end{aligned}
$$

$$q'^{11\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = 0$$

$$q'^{11\cdot0}_{1\cdot0\cdot0} = q'_{1\cdot3}\mu^2\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{1\cdot3} + (a_1 q_{2\cdot3} - a_2 q_{1\cdot3} + a_2 q_{3\cdot3} - a_3 q_{2\cdot3})\mu^2 + (a_3 q_{4\cdot3} - a_4 q_{3\cdot3})\mu^4\}\mu^2\alpha$$

$$q'^{11\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = q'_{2\cdot3}\mu^2 = \{(1+a_0\mu^2)q_{2\cdot3} + (a_2 q_{4\cdot3} - a_4 q_{2\cdot3})\mu^4 + (a_1 q_{1\cdot3} + a_1 q_{3\cdot3} - a_3 q_{1\cdot3})\mu^2\alpha^2\}\mu^2$$

u. s. w.:

$$q'^{11\cdot0}_{3\cdot0\cdot0} = q'_{3\cdot3}\mu^2\alpha$$
$$q'^{11\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} = q'_{4\cdot3}\mu^4$$
$$q'^{11\cdot0}_{5\cdot0\cdot0} = q'_{5\cdot3}\mu^4\alpha$$
$$q'^{11\cdot0}_{6\cdot0\cdot0} = q'_{6\cdot3}\mu^6$$

Die Formeln für die $q'^{11\cdot0}_{n\cdot0\cdot0}$ sind ganz analog denen für die $q'_{n\cdot0\cdot0}$ (Tafel 2); es tritt nur $q'_{n\cdot3}$ an Stelle von $q'_{n\cdot0}$ und $q_{n\cdot3}$ an Stelle von $q_{n\cdot0}$.

$$q'^{11\cdot0}_{-n\cdot0\cdot0} = -q'^{11\cdot0}_{n\cdot0\cdot0}$$

$$q'^{10\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = q'_{0\cdot4}\mu^5 = \{(1+a_0\mu^2)q_{0\cdot4} + 2a_2 q_{2\cdot4} + 2a_4 q_{4\cdot4}\mu^4\}\mu^5$$

$$q'^{10\cdot1}_{1\cdot0\cdot0} = q'_{1\cdot4}\mu^3\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{1\cdot4} + (a_1 q_{2\cdot4} + a_2 q_{1\cdot4} + a_2 q_{3\cdot4} + a_3 q_{2\cdot4})\mu^2\}\mu^3\alpha$$

$$q'^{10\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} = q'_{2\cdot4}\mu^3 = \{(1+a_0\mu^2)q_{2\cdot4} + (a_2 q_{0\cdot4} + a_2 q_{4\cdot4} + a_4 q_{2\cdot4})\mu^4\}\mu^3$$

$$q'^{10\cdot1}_{3\cdot0\cdot0} = q'_{3\cdot4}\mu^3\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{3\cdot4} + (a_1 q_{2\cdot4} + a_2 q_{1\cdot4})\mu^2\}\mu^3\alpha$$

$$q'^{10\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = q'_{4\cdot4}\mu^5 = \{(1+a_0\mu^2)q_{4\cdot4} + a_2 q_{2\cdot4} + (a_2 q_{6\cdot4} + a_4 q_{0\cdot4} + a_6 q_{2\cdot4})\mu^4\}\mu^5$$

$$q'^{10\cdot1}_{5\cdot0\cdot0} = q'_{5\cdot4}\mu^5\alpha = \{(1+a_0\mu^2)q_{5\cdot4} + a_2 q_{3\cdot4} + a_3 q_{2\cdot4} + (a_1 q_{4\cdot4} + a_4 q_{1\cdot4})\mu^2\}\mu^5\alpha$$

$$q'^{10\cdot1}_{6\cdot0\cdot0} = q'_{6\cdot4}\mu^7 = \left\{(1+a_0\mu^2)q_{6\cdot4} + a_2 q_{4\cdot4} + a_4 q_{2\cdot4} + a_3 q_{3\cdot4}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^7$$

$$q'^{10\cdot1}_{-n\cdot0\cdot0} = q'^{10\cdot1}_{n\cdot0\cdot0}.$$

Tafel 9 (s. Seite 61).

$$p'_{-6\cdot1\cdot0} = p'_{-6\cdot1}\mu^6 = -(1-\delta_2)\{2b_2 q_{-4\cdot1} + 4b_4 q_{-2\cdot1}\}\mu^6$$

$$p'_{-5\cdot1\cdot0} = p'_{-5\cdot1}\mu^4\alpha = -(1-\delta_2)\{2b_2 q_{-3\cdot1} + 3b_3 q_{-2\cdot1} + b_1 q_{-4\cdot1}\mu\}\mu^4\alpha$$

$$p'_{-4\cdot1\cdot0} = p'_{-4\cdot1}\mu^4 = -(1-\delta_2)\left\{2b_2 q_{-2\cdot1} + b_1 q_{-3\cdot1}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$p'_{-3\cdot1\cdot0} = p'_{-3\cdot1}\mu^3\alpha = -(1-\delta_2)\{b_1 q_{-2\cdot1} + 2b_2 q_{-1\cdot1} - b_1 q_{-4\cdot1}\mu^2\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{-2\cdot1\cdot0} = p'_{-2\cdot1}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2(q_{-4\cdot1} - q_{0\cdot1}) - 4b_4 q_{2\cdot1} + b_1(q_{-3\cdot1} - q_{-1\cdot1})\frac{\alpha^2}{\mu^2} - 3b_3 q_{1\cdot1}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^6$$

$$p'_{-1\cdot1\cdot0} = p'_{-1\cdot1}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\{b_1 q_{-2\cdot1} + (2b_2(q_{-3\cdot1} - q_{1\cdot1}) - 3b_3 q_{2\cdot1})\mu - b_1 q_{0\cdot1}\mu^2 + (3b_3 q_{-4\cdot1} - 4b_4 q_{3\cdot1})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{0\cdot1\cdot0} = p'_{0\cdot1}\mu^4 = (1-\delta_2)\left\{2b_2(q_{-2\cdot1} - q_{2\cdot1}) + b_1(q_{-1\cdot1} - q_{1\cdot1})\frac{\alpha^2}{\mu} + 4b_4(q_{-4\cdot1} - q_{4\cdot1})\mu^4 + 3b_3(q_{-3\cdot1} - q_{3\cdot1})\alpha^2\right\}\mu^4$$

$$p'_{1\cdot1\cdot0} = p'_{1\cdot1}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\{-b_1 q_{2\cdot1} + (2b_2(q_{-1\cdot1} - q_{3\cdot1}) + 3b_3 q_{-2\cdot1})\mu + b_1 q_{0\cdot1}\mu^2\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{2\cdot1\cdot0} = p'_{2\cdot1}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2(q_{0\cdot1}-q_{4\cdot1})+4b_4q_{-2\cdot1}+b_1(q_{1\cdot1}-q_{3\cdot1})\frac{\alpha^2}{\mu^3}\right\}\mu^6$$

$$p'_{3\cdot1\cdot0} = p'_{3\cdot1}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\left\{\ b_1q_{2\cdot1}+2b_2q_{1\cdot1}\mu-b_1q_{4\cdot1}\mu^2\right\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{4\cdot1\cdot0} = p'_{4\cdot1}\mu^4 = (1-\delta_2)\left\{2b_3q_{2\cdot1}+b_1q_{3\cdot1}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$p'_{5\cdot1\cdot0} = p'_{5\cdot1}\mu^4\alpha = (1-\delta_2)\left\{2b_2q_{3\cdot1}+3b_3q_{2\cdot1}+b_1q_{4\cdot1}\mu\right\}\mu^4\alpha$$

$$p'_{6\cdot1\cdot0} = p'_{6\cdot1}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2q_{4\cdot1}+4b_4q_{2\cdot1}\right\}\mu^6$$

$$p'_{-7\cdot0\cdot1} = p'_{-7\cdot2}\mu^6 = -(1-\delta_2)\left\{2b_2q_{-5\cdot2}+4b_4q_{-3\cdot2}\right\}\mu^6$$

$$p'_{-6\cdot0\cdot1} = p'_{-6\cdot2}\mu^4\alpha = -(1-\delta_2)\left\{2b_2q_{-4\cdot2}+3b_3q_{-3\cdot2}+b_1q_{-5\cdot2}\mu\right\}\mu^4\alpha$$

$$p'_{-5\cdot0\cdot1} = p'_{-5\cdot2}\mu^4 = -(1-\delta_2)\left\{2b_2q_{-3\cdot2}+b_1q_{-4\cdot2}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$p'_{-4\cdot0\cdot1} = p'_{-4\cdot2}\mu^3\alpha = -(1-\delta_2)\left\{\ b_1q_{-3\cdot2}+2b_2q_{-2\cdot2}\mu-b_1q_{-5\cdot2}\mu^2\right\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{-3\cdot0\cdot1} = p'_{-3\cdot2}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2q_{-5\cdot2}-2b_2q_{-1\cdot2}-4b_4q_{1\cdot2}+b_1(q_{-4\cdot2}-q_{-2\cdot2})\frac{\alpha^2}{\mu^3}\right\}\mu^6$$

$$p'_{-2\cdot0\cdot1} = p'_{-2\cdot2}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\left\{\ b_1q_{-3\cdot2}+(2b_2(q_{-4\cdot2}-q_{0\cdot2})-3b_3q_{1\cdot2})\mu-b_1q_{-1\cdot2}\mu^2\right.$$
$$\left.+(3b_3q_{-5\cdot2}-4b_4q_{2\cdot2})\mu^3\right\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{-1\cdot0\cdot1} = p'_{-1\cdot2}\mu^4 = (1-\delta_2)\left\{2b_2(q_{-3\cdot2}-q_{1\cdot2})+b_1(q_{-2\cdot2}-q_{0\cdot2})\frac{\alpha^2}{\mu}\right.$$
$$\left.+4b_4(q_{-5\cdot2}-q_{3\cdot2})\mu^4+3b_3(q_{-4\cdot2}-q_{2\cdot2})\alpha^2\right\}\mu^4$$

$$p'_{0\cdot0\cdot1} = p'_{0\cdot2}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\left\{-b_1q_{1\cdot2}+(2b_2(q_{-2\cdot2}-q_{2\cdot2})+3b_3q_{-3\cdot2})\mu+b_1q_{-1\cdot2}\mu^2\right.$$
$$\left.+(-3b_3q_{3\cdot2}+4b_4q_{-4\cdot2})\mu^3\right\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{1\cdot0\cdot1} = p'_{1\cdot2}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2(q_{-1\cdot2}-q_{3\cdot2})+4b_4q_{-3\cdot2}+b_1(q_{0\cdot2}-q_{2\cdot2})\frac{\alpha^2}{\mu^3}\right\}\mu^6$$

$$p'_{2\cdot0\cdot1} = p'_{2\cdot2}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\left\{\ b_1q_{1\cdot2}+2b_2q_{0\cdot2}\mu-b_1q_{3\cdot2}\mu^2\right\}\mu^3\alpha$$

$$p'_{3\cdot0\cdot1} = p'_{3\cdot2}\mu^4 = (1+\delta_2)\left\{2b_2q_{1\cdot2}+b_1q_{2\cdot2}\frac{\alpha^2}{\mu}\right\}\mu^4$$

$$p'_{4\cdot0\cdot1} = p'_{4\cdot2}\mu^4\alpha = (1-\delta_2)\left\{2b_2q_{2\cdot2}+3b_3q_{1\cdot2}+b_1q_{3\cdot2}\mu\right\}\mu^4\alpha$$

$$p'_{5\cdot0\cdot1} = p'_{5\cdot2}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2q_{3\cdot2}+4b_4q_{1\cdot2}\right\}\mu^6$$

$$p'^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} = p'_{0\cdot3}\mu^4 = -2(1-\delta_2)\left\{2b_2q_{2\cdot3}+b_1q_{1\cdot3}\frac{\alpha^2}{\mu}+4b_4q_{4\cdot3}\mu^4+3b\ q_{3\cdot3}\alpha^2\right\}\mu^4$$

$$p'^{1\cdot0}_{1\cdot0\cdot0} = p'_{1\cdot3}\mu^3\alpha = -(1-\delta_2)\left\{\ b_1q_{2\cdot3}+(2b_2(q_{1\cdot3}+q_{3\cdot3})+3b_3q_{2\cdot3})\mu\right.$$
$$\left.+(3b_2q_{4\cdot3}+4b_4q_{3\cdot3})\mu^3\right\}\mu^3\alpha$$

$$p'^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} = p'_{2\cdot3}\mu^6 = -(1-\delta_2)\left\{2b_2q_{4\cdot3}+4b_4q_{2\cdot3}+b_1(-q_{1\cdot3}+q_{3\cdot3})\frac{\alpha^2}{\mu^3}+3b_3q_{1\cdot3}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^6$$

$$p'^{1\cdot0}_{3\cdot0\cdot0} = p'_{3\cdot3}\mu^3\alpha = (1-\delta_2)\{\ b_1 q_{2\cdot3} + 2b_2 q_{1\cdot3}\mu - b_1 q_{4\cdot3}\mu^2 - (2b_2 q_{5\cdot3} + 4b_4 q_{1\cdot3} + 5b_5 q_{2\cdot3})\mu^3\}\mu^3\alpha$$

$$p'^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} = p'_{4\cdot3}\mu^4 = (1-\delta_2)\left\{2b_2 q_{2\cdot3} + b_1 q_{3\cdot3}\frac{\alpha^2}{\mu} - (2b_2 q_{6\cdot3} + 6b_6 q_{2\cdot3})\mu^4 + 3b_3 q_{1\cdot3}\alpha^2\right\}\mu^4$$

$$p'^{1\cdot0}_{5\cdot0\cdot0} = p'_{5\cdot3}\mu^4\alpha = (1-\delta_2)\{2b_2 q_{3\cdot3} + 3b_3 q_{2\cdot3} + b_1 q_{4\cdot3}\mu + 4b_4 q_{1\cdot3}\mu^2\}\mu^4\alpha$$

$$p'^{1\cdot0}_{6\cdot0\cdot0} = p'_{6\cdot3}\mu^6 = (1-\delta_2)\left\{2b_2 q_{4\cdot3} + 4b_4 q_{2\cdot3} + 3b_3 q_{3\cdot3}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^6$$

$$p'^{1\cdot0}_{-n\cdot0\cdot0} = p'^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0}$$

$$p'^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} = 0$$

$$p'^{0\cdot1}_{1\cdot0\cdot0} = p'_{1\cdot4}\mu^4\alpha = (1-\delta_2)\{\ b_1 q_{2\cdot4} + (2b_2(-q_{1\cdot4} + q_{3\cdot4}) - 3b_3 q_{2\cdot4})\mu - b_1 q_{0\cdot4}\mu^2\}\mu^4\alpha$$

$$p'^{0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} = p'_{2\cdot4}\mu^7 = -(1-\delta_2)\left\{2b_2(q_{0\cdot4} - q_{4\cdot4}) + 4b_4 q_{2\cdot4} + b_1(q_{1\cdot4} - q_{3\cdot4})\frac{\alpha^2}{\mu^3}\right\}\mu^7$$

$$p'^{0\cdot1}_{3\cdot0\cdot0} = p'_{3\cdot4}\mu^4\alpha = -(1-\delta_2)\{\ b_1 q_{2\cdot4} + 2b_2 q_{1\cdot4}\mu - b_1 q_{4\cdot4}\mu^2\}\mu^4\alpha$$

$$p'^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} = p'_{4\cdot4}\mu^5 = -(1-\delta_2)\left\{2b_2 q_{2\cdot4} + b_1 q_{3\cdot4}\frac{\alpha^2}{\mu} + (-2b_2 q_{6\cdot4} + 4b_4 q_{0\cdot4} + 6b_6 q_{2\cdot4})\mu^4\right\}\mu^5$$

$$p'^{0\cdot1}_{5\cdot0\cdot0} = p'_{5\cdot4}\mu^5\alpha = -(1-\delta_2)\{2b_2 q_{3\cdot4} + 3b_3 q_{2\cdot4} + b_1 q_{4\cdot4}\mu\}\mu^5\alpha$$

$$p'^{0\cdot1}_{6\cdot0\cdot0} = p'_{6\cdot4}\mu^7 = -(1-\delta_2)\{2b_2 q_{4\cdot4} + 4b_4 q_{2\cdot4}\}\mu^7$$

$$p'^{0\cdot1}_{-n\cdot0\cdot0} = -p'^{0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0}$$

Tafel 10 (s. Seite 61).

$$t_{-6\cdot1\cdot0} = t_{6\cdot1}\mu^6 = \{p_{-6\cdot1} + p'_{6\cdot1}\}\mu^6 \qquad t_{-7\cdot0\cdot1} = t_{-7\cdot2}\mu^6 = \{p_{-7\cdot2} + p'_{-7\cdot2}\}\mu^6$$

$$t_{-5\cdot1\cdot0} = t_{5\cdot1}\mu^4\alpha = \{p_{5\cdot1} + p'_{5\cdot1}\}\mu^4\alpha \qquad t_{-6\cdot0\cdot1} = t_{-6\cdot2}\mu^4\alpha = \{p_{-6\cdot2} + p'_{-6\cdot2}\}\mu^4\alpha$$

$$t_{-4\cdot1\cdot0} = t_{4\cdot1}\mu^4 = \{p_{4\cdot1} + p'_{4\cdot1}\}\mu^4 \qquad t_{-5\cdot0\cdot1} = t_{-5\cdot2}\mu^4 = \{p_{-5\cdot2} + p'_{-5\cdot2}\}\mu^4$$

$$t_{-3\cdot1\cdot0} = t_{3\cdot1}\mu^2\alpha = \{p_{3\cdot1} + p'_{3\cdot1}\mu\}\mu^2\alpha \qquad t_{-4\cdot0\cdot1} = t_{-4\cdot2}\mu^2\alpha = \{p_{-4\cdot2} + p'_{-4\cdot2}\mu\}\mu^2\alpha$$

$$t_{-2\cdot1\cdot0} = t_{2\cdot1}\mu^2 = \{p_{2\cdot1} + p'_{2\cdot1}\mu^4\}\mu^2 \qquad t_{-3\cdot0\cdot1} = t_{3\cdot2}\mu^2 = \{p_{-3\cdot2} + p'_{-3\cdot2}\mu^4\}\mu^2$$

$$t_{-1\cdot1\cdot0} = t_{1\cdot1}\mu^2\alpha = \{p_{1\cdot1} + p'_{1\cdot1}\mu\}\mu^2\alpha \qquad t_{-2\cdot0\cdot1} = t_{-2\cdot2}\mu^2\alpha = \{p_{-2\cdot2} + p'_{-2\cdot2}\mu\}\mu^2\alpha$$

$$t_{0\cdot1\cdot0} = t_{0\cdot1}\mu^2 = \{p_{0\cdot1} + p'_{0\cdot1}\mu^2\}\mu^2 \qquad t_{-1\cdot0\cdot1} = t_{-1\cdot2}\mu^2 = \{p_{-1\cdot2} + p'_{-1\cdot2}\mu^2\}\mu^2$$

$$t_{1\cdot1\cdot0} = t_{1\cdot1}\mu^2\alpha = \{p_{1\cdot1} + p'_{1\cdot1}\mu\}\mu^2\alpha \qquad t_{0\cdot0\cdot1} = t_{0\cdot2}\mu^2\alpha = \{p_{0\cdot2} + p'_{0\cdot2}\mu\}\mu^2\alpha$$

$$t_{2\cdot1\cdot0} = t_{2\cdot1}\mu^2 = \{p_{2\cdot1} + p'_{2\cdot1}\mu^4\}\mu^2 \qquad t_{1\cdot0\cdot1} = t_{1\cdot2}\mu^2 = \{p_{1\cdot2} + p'_{1\cdot2}\mu^4\}\mu^2$$

$$t_{3\cdot1\cdot0} = t_{3\cdot1}\mu^2\alpha = \{p_{3\cdot1} + p'_{3\cdot1}\mu\}\mu^2\alpha \qquad t_{2\cdot0\cdot1} = t_{2\cdot2}\mu^2\alpha = \{p_{2\cdot2} + p'_{2\cdot2}\mu\}\mu^2\alpha$$

$$t_{4\cdot1\cdot0} = t_{4\cdot1}\mu^4 = \{p_{4\cdot1} + p'_{4\cdot1}\}\mu^4 \qquad t_{3\cdot0\cdot1} = t_{3\cdot2}\mu^4 = \{p_{3\cdot2} + p'_{3\cdot2}\}\mu^4$$

$$t_{5\cdot1\cdot0} = t_{5\cdot1}\mu^4\alpha = \{p_{5\cdot1} + p'_{5\cdot1}\}\mu^4\alpha \qquad t_{4\cdot0\cdot1} = t_{4\cdot2}\mu^4\alpha = \{p_{4\cdot2} + p'_{4\cdot2}\}\mu^4\alpha$$

$$t_{6\cdot1\cdot0} = t_{6\cdot1}\mu^6 = \{p_{6\cdot1} + p'_{6\cdot1}\}\mu^6 \qquad t_{5\cdot0\cdot1} = t_{5\cdot2}\mu^6 = \{p_{5\cdot2} + p'_{5\cdot2}\}\mu^6$$

$$
\begin{aligned}
t^{1\cdot0}_{0\cdot0\cdot0} &= t_{0\cdot3}\mu^2 &&= \{p_{0\cdot3} + p'_{0\cdot3}\mu^2\}\mu^2 & t^{0\cdot1}_{0\cdot0\cdot0} &= 0\\
t^{1\cdot0}_{1\cdot0\cdot0} &= t_{1\cdot3}\mu^2\alpha &&= \{p_{1\cdot3} + p'_{1\cdot3}\mu\}\mu^2\alpha & t^{0\cdot1}_{1\cdot0\cdot0} &= t_{1\cdot4}\mu^3\alpha = \{p_{1\cdot4} + p'_{1\cdot4}\mu\}\mu^3\alpha\\
t^{1\cdot0}_{2\cdot0\cdot0} &= t_{2\cdot3}\mu^2 &&= \{p_{2\cdot3} + p'_{2\cdot3}\mu^4\}\mu^2 & t^{0\cdot1}_{2\cdot0\cdot0} &= t_{2\cdot4}\mu^3 = \{p_{2\cdot4} + p'_{2\cdot4}\mu^4\}\mu^3\\
t^{1\cdot0}_{3\cdot0\cdot0} &= t_{3\cdot3}\mu^2\alpha &&= \{p_{3\cdot3} + p'_{3\cdot3}\mu\}\mu^2\alpha & t^{0\cdot1}_{3\cdot0\cdot0} &= t_{3\cdot4}\mu^3\alpha = \{p_{3\cdot4} + p'_{3\cdot4}\mu\}\mu^3\alpha\\
t^{1\cdot0}_{4\cdot0\cdot0} &= t_{4\cdot3}\mu^4 &&= \{p_{4\cdot3} + p'_{4\cdot3}\}\mu^4 & t^{0\cdot1}_{4\cdot0\cdot0} &= t_{4\cdot4}\mu^5 = \{p_{4\cdot4} + p'_{4\cdot4}\}\mu^5\\
t^{1\cdot0}_{5\cdot0\cdot0} &= t_{5\cdot3}\mu^4\alpha &&= \{p_{5\cdot3} + p'_{5\cdot3}\}\mu^4\alpha & t^{0\cdot1}_{5\cdot0\cdot0} &= t_{5\cdot4}\mu^5\alpha = \{p_{5\cdot4} + p'_{5\cdot4}\}\mu^5\alpha\\
t^{1\cdot0}_{6\cdot0\cdot0} &= t_{6\cdot3}\mu^6 &&= \{p_{6\cdot3} + p'_{6\cdot3}\}\mu^6 & t^{0\cdot1}_{6\cdot0\cdot0} &= t_{6\cdot4}\mu^7 = \{p_{6\cdot4} + p'_{6\cdot4}\}\mu^7
\end{aligned}
$$

$$t^{1\cdot0}_{-n\cdot0\cdot0} = t^{1\cdot0}_{n\cdot0\cdot0}, \qquad t^{0\cdot1}_{-n\cdot0\cdot0} = -t^{0\cdot1}_{n\cdot0\cdot0}.$$

Tafel 11.

$$
\begin{aligned}
t'_{0\cdot0\cdot0} &= t'_{0\cdot0}\mu^2 &&= \{(1+a''_0\mu^2)t_{0\cdot0} + 2a''_2 t_{2\cdot0}\mu^2 + 2a''_4 t_{4\cdot0}\mu^6 + 2(a''_1 t_{1\cdot0} + a''_3 t_{3\cdot0})\mu^3\alpha^2\}\mu^2\\
t'_{1\cdot0\cdot0} &= t'_{1\cdot0}\mu^2\alpha &&= \{(1+a''_0\mu^2)t_{1\cdot0} + (a''_1 t_{0\cdot0} + a''_1 t_{2\cdot0} + a''_3 t_{1\cdot0} + a''_2 t_{3\cdot0} + a''_3 t_{2\cdot0})\mu^2\\
&&&\quad + (a''_3 t_{4\cdot0} + a''_4 t_{3\cdot0})\mu^4\}\mu^2\alpha\\
t'_{2\cdot0\cdot0} &= t'_{2\cdot0}\mu^2 &&= \{(1+a''_0\mu^2)t_{2\cdot0} + a''_2 t_{0\cdot0}\mu^2 + (a''_2 t_{4\cdot0} + a''_4 t_{2\cdot0})\mu^4\\
&&&\quad + (a''_1 t_{1\cdot0} + a''_1 t_{3\cdot0} + a''_3 t_{1\cdot0})\mu^2\alpha^2\}\mu^2\\
t'_{3\cdot0\cdot0} &= t'_{3\cdot0}\mu^2 a &&= \{(1+a''_0\mu^2)t_{3\cdot0} + (a''_1 t_{2\cdot0} + a''_2 t_{1\cdot0} + a''_3 t_{0\cdot0})\mu^2\\
&&&\quad + (a''_1 t_{4\cdot0} + a''_2 t_{5\cdot0} + a''_4 t_{1\cdot0} + a''_5 t_{2\cdot0})\mu^4\}\mu^2\alpha\\
t'_{4\cdot0\cdot0} &= t'_{4\cdot0}\mu^4 &&= \{(1+a''_0\mu^2)t_{4\cdot0} + a''_2 t_{2\cdot0} + a''_4 t_{0\cdot0}\mu^2 + (a''_2 t_{6\cdot0} + a''_6 t_{2\cdot0})\mu^4\\
&&&\quad + (a''_1 t_{3\cdot0} + a''_3 t_{1\cdot0})\alpha^2\}\mu^4\\
t'_{5\cdot0\cdot0} &= t'_{5\cdot0}\mu^4\alpha &&= \{(1+a''_0\mu^2)t_{5\cdot0} + a''_2 t_{3\cdot0} + a''_3 t_{2\cdot0} + (a''_1 t_{4\cdot0} + a''_4 t_{1\cdot0} + a''_5 t_{0\cdot0})\mu^2\}\mu^4\alpha\\
t'_{6\cdot0\cdot0} &= t'_{6\cdot0}\mu^6 &&= \left\{(1+a''_0\mu^2)t_{6\cdot0} + a''_2 t_{4\cdot0} + a''_4 t_{2\cdot0} + a''_6 t_{0\cdot0}\mu^2 + a''_3 t_{3\cdot0}\frac{\alpha^2}{\mu^2}\right\}\mu^6
\end{aligned}
$$

$$t'_{-n\cdot0\cdot0} = t_{n\cdot0\cdot0}.$$

Tafel 12.

$$
\begin{aligned}
l_{0\cdot0\cdot0} &= l_{0\cdot0}\mu^2\\
l_{1\cdot0\cdot0} &= l_{1\cdot0}\mu^2\alpha \qquad & l_{n\cdot0\cdot0} &= a_{n\cdot0\cdot0} - t'_{n\cdot0\cdot0}\\
l_{2\cdot0\cdot0} &= l_{2\cdot0}\mu^2 \qquad & l_{n\cdot0} &= a_n - t_{n\cdot0}\\
l_{3\cdot0\cdot0} &= l_{3\cdot0}\mu^2\alpha\\
l_{4\cdot0\cdot0} &= l_{4\cdot0}\mu^4\\
l_{5\cdot0\cdot0} &= l_{5\cdot0}\mu^4\alpha\\
l_{6\cdot0\cdot0} &= l_{6\cdot0}\mu^6
\end{aligned}
$$

$$l_{-n\cdot0\cdot0} = l_{n\cdot0\cdot0}.$$

GETTY RESEARCH INSTITUTE
3 3125 01378 1576